Algebraische Geometrie

1. Affine Varietät

1.1 $p(x) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ Polynom

$p \to \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$

$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mapsto p(a_1, \dots, a_n)$ einsetzen.

V komplexer n-dim Vektorraum, $f : V \to \mathbb{C}$ reguläre Funktion, falls $\exists$ Polynom so dass f bzgl. einer (bzgl. aller) Basis gegeben wird durch p. D.h. $v_1, \dots, v_n$ Basis

$f(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots, a_n v_n) = p(a_1, \dots, a_n)$

Bsp.: $V = M_n(\mathbb{C})$, $\det : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ reguläre Funktion

Bsp.: $X = (x_{ij})$, $\det(t \mathbb{1} - X) = t^n - s_1 t^{n-1} + s_2 t^{n-2} \dots (-1)^n s_n$ mit $s_i \in \mathbb{C}[x_{ij}]_{1 \le i,j \le n}$

$s_1(A) = \text{Spur } A$, $s_n(A) = \det A$

1.2 $\mathcal{O}(V)$ = Algebra der regulären Funktionen auf einem endlich-dim. $\mathbb{C}$-Vektorraum

Def.: $f \in \mathcal{O}(V)$. $\mathcal{V}(f)$ = Nullstellenmenge von f $= \{ v \in V \mid f(v) = 0 \} = f^{-1}(0)$

$\mathcal{V}(f_1, \dots, f_r) = \bigcap_{i=1}^{r} \mathcal{V}(f_i) = \{ v \in V \mid f_1(v) = \dots = f_r(v) = 0 \}$

$S \subseteq \mathcal{O}(V)$: $\mathcal{V}(S) = \{ v \in V \mid f(v) = 0 \ \forall f \in S \}$

Bsp.: $SL_n(\mathbb{C}) = \mathcal{V}(\det - 1) = \{ A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det A - 1 = 0 \}$

Nil_n = nilpotente $n \times n$-Matrizen $= \mathcal{V}(f_{ij} \mid 1 \le i,j \le n)$ wobei die f_{ij} = Einträge der Matrix

$X = (x_{ij})$, $X^n = (f_{ij})$

Elementare Eigenschaften:

1) $S \subseteq \mathcal{O}(V)$, $\mathfrak{a} = (S) \subseteq \mathcal{O}(V)$ das von S erzeugte Ideal.

Dann ist $\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}(\mathfrak{a})$.

2) $S \subseteq T \subseteq \mathcal{O}(V) \Rightarrow \mathcal{V}(S) \supseteq \mathcal{V}(T)$

3) $(S_i)_{i \in I}$ Familie von Teilmengen von $\mathcal{O}(V)$. Dann gilt $\bigcap_{i \in I} \mathcal{V}(S_i) = \mathcal{V}(\bigcup_{i \in I} S_i)$

Lemma: Sei V $\mathbb{C}$-VR mit $\dim V < \infty$. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, (\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ Ideale in $\mathcal{O}(V)$

1) $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \Rightarrow \mathcal{V}(\mathfrak{a}) \supseteq \mathcal{V}(\mathfrak{b})$

2) $\bigcap_{i \in I} \mathcal{V}(\mathfrak{a}_i) = \mathcal{V}(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i)$

3) $\mathcal{V}(\mathfrak{a}) \cup \mathcal{V}(\mathfrak{b}) = \mathcal{V}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \mathcal{V}(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})$

4) $\mathcal{V}(0) = V$, $\mathcal{V}(1) = \emptyset$

Bew.: zu 3) $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \Rightarrow \mathcal{V}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})$
$\mathcal{V}(\mathfrak{b}) \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})$

$\Rightarrow \mathcal{V}(\mathfrak{a}) \cup \mathcal{V}(\mathfrak{b}) \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})$

Sei $v \in V$ so dass $v \notin \mathcal{V}(\mathfrak{a}) \cap \mathcal{V}(\mathfrak{b}) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \exists f \in \mathfrak{a}: f(v) \neq 0 \\ \exists h \in \mathfrak{b}: h(v) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (f \cdot h)(v) \neq 0$ und $f \cdot h \in \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$
$\Rightarrow v \notin \mathcal{V}(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) \Rightarrow$ "="

Def.: Die Mengen der Form $\mathcal{V}(S)$, $S \subseteq \mathcal{O}(V)$ nennt man abgeschlossene Mengen der Zariski-Topologie.
Die offenen Mengen der Zariski-Topologie sind die Komplemente der Nullstellenmengen $\mathcal{V}(S)$, $S \subseteq \mathcal{O}(V)$

Bsp.: abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{C}$. endliche Teilmengen

Sei $X \subseteq V$ abgeschlossen (d.h. $X = \mathcal{V}(S)$, $S \subseteq \mathcal{O}(V)$). Sei $f: X \to \mathbb{C}$ Funktion, dann nennt man f regulär, falls $\exists \tilde{f} \in \mathcal{O}(V)$ mit $\tilde{f}|_X = f$. $\mathcal{O}(X)$ = Algebra der regulären Funktionen.

Beachte $\pi: \mathcal{O}(V) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(X)$, also: $\mathcal{O}(X) \simeq \mathcal{O}(V)/\ker\pi$, $\ker\pi = \{f \in \mathcal{O}(V) \mid f|_X \equiv 0\}$

Offensichtlich $S \subseteq (S) \subseteq \ker\pi$ // (S) von S erzeugtes Ideal

Def.: (Version 1) Unter einer affinen Varietät X mit Algebra der regulären Funktionen $\mathcal{O}(X)$ versteht man ein Paar $(X \subseteq V)$, wobei X eine abgeschlossene Teilmenge ist und

$$\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(V)/\ker\pi, \quad \pi: \mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(X), \quad f \mapsto f|_X.$$

Unter einem Morphismus $\varphi: X \to Y$ zwischen 2 affinen Varietäten $X \subseteq V$, $Y \subseteq W$ versteht man eine Abb., die man als Einschränkung einer polynomialen Abb. von V nach W erhält:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow[\tilde{\varphi}]{\text{polynomial}} & W \\ \cup & & \cup \\ X & \xrightarrow[\varphi]{} & Y \end{array} \qquad \tilde{\varphi}|_X = \varphi$$

V, W Vektorräume, $\varphi: V \to W$ polynomial, falls es Polynome gibt $p_1, \dots, p_m$ $m = \dim W$ $p_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ $n = \dim V$ mit $\varphi(a_1 v_1 + \dots a_n v_n) = p_1(a_1, \dots, a_n) w_1 + \dots + p_m(a_1, \dots, a_n) w_m$

$v_1, \dots, v_n \subseteq V$
$w_1, \dots, w_m \subseteq W$ Basen $\quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{F} & \mathbb{C}^m \\ \cup & & \cup \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array} \quad F$ durch $\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix}$, $p_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$

1.3 **Def.:** $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal in einem Ring R (mit 1). Das Radikal $\sqrt{\mathfrak{a}} = \{f \in R \mid f^m \in \mathfrak{a}$ für ein $m > 0\}$
(offensichtlich: Das Radikal ist ein Ideal)

Bem.: $\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}} = \sqrt{\mathfrak{a}}$
$\sqrt{\mathfrak{a}} = R \Rightarrow \mathfrak{a} = R$

<u>Nullstellensatz von Hilbert</u>: Sei V endlich-dim., sei $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}(V)$ Ideal. Sei $X = \mathcal{V}(\mathfrak{a})$,

$$\mathcal{I}(X) = \{f \in \mathcal{O}(V) \mid f|_X \equiv 0\} = \ker\pi. \quad \mathcal{I}(X) = \mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$$

Korollar: $\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(V)/\sqrt{\mathfrak{a}}$ für $X = \mathcal{V}(\mathfrak{a})$

Korollar: Sei $\mathfrak{a} \subsetneq \mathcal{O}(V)$ echtes Ideal. Dann ist $\mathcal{V}(\mathfrak{a}) \neq \emptyset$

Bew.: $X = \mathcal{V}(\mathfrak{a}) = \emptyset \Rightarrow \mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(V)/\sqrt{\mathfrak{a}} = 0 \Rightarrow \sqrt{\mathfrak{a}} = \mathcal{O}(V) \Rightarrow \mathfrak{a} = \mathcal{O}(V)$ ↯

Korollar: Die maximalen Ideale in $\mathcal{O}(V)$ sind von der Form $(x_1-a_1, x_2-a_2, \dots, x_n-a_n)$, d.h. geg $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{C}$

dann sei $\mathfrak{M}_{a_1,\dots,a_n}$ das Ideal erzeugt von $\{x_1-a_1, \dots, x_n-a_n\}$

Bew.: 1) $\mathfrak{M}_{a_1\dots a_n}$ hat den Vektor $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ als gemeinsame Nullstelle $\Rightarrow \mathfrak{M}_{a_1,\dots,a_n} \neq \mathcal{O}(V)$

2) $\mathfrak{M} \subsetneq \mathcal{O}(V)$ echtes max. Ideal $\Rightarrow \mathcal{V}(\mathfrak{M}) \neq \emptyset$. Sei $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{V}(\mathfrak{M})$

$\Rightarrow \mathfrak{M}_{a_1,\dots,a_n}$ hat $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ als einzige gemeinsame Nullstellenmenge $\Rightarrow \mathcal{V}(\mathfrak{M}) \supset \mathcal{V}(\mathfrak{M}_{a_1,\dots,a_n})$

$\Rightarrow \mathfrak{M}_{a_1,\dots,a_n} \supseteq \mathfrak{M}$. da $\mathfrak{M}$ max. $\Rightarrow \mathfrak{M}_{a_1,\dots,a_n} = \mathfrak{M}$

Bem.: Geometrie $\longleftrightarrow$ Algebra

Punkte in $V = \mathbb{C}^n \longleftrightarrow$ maximale Ideale in $\mathcal{O}(V)$

Bsp.: $V = \mathbb{C}^2$, $I = (x^2, y^2) \subseteq \mathcal{O}(V) = \mathbb{C}[x,y]$

$\mathcal{V}(I) = \{0\}$, $\sqrt{I} = (x,y)$. $\mathcal{O}(V)/I = \mathbb{C}[x,y]/(x^2,y^2) = \mathbb{C}\bar{1} + \mathbb{C}\bar{x} + \mathbb{C}\bar{y} + \mathbb{C}\bar{xy}$

endlich dim. Ring. $\mathcal{O}(V)/\sqrt{I} = \mathbb{C}[x,y]/(x,y) = \mathbb{C}1$

Def.: Ein Ring (mit 1) heißt reduziert falls R keine nilpotenten Elemente enthält.

(d.h. $r^n = 0 \Rightarrow r = 0$ für $n \geq 1$)

Bem.: V endlich-dim. $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}(V)$ Ideal. $X = \mathcal{V}(\mathfrak{a})$, $\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(V)/\sqrt{\mathfrak{a}}$ ist reduziert.

denn $f \in \mathcal{O}(X)$ mit $f^n = 0 \Leftrightarrow \exists \tilde{f} \in \mathcal{O}(V)$, $\tilde{f}|_X = f$ und $\tilde{f}^n \in \mathfrak{a} \Rightarrow \tilde{f} \in \sqrt{\mathfrak{a}}$

$\Rightarrow f = \tilde{f} \mod \sqrt{\mathfrak{a}} = 0$

Def.: Ein Ring/Algebra heißt endlich erzeugt, falls es einen surjektiven Algebrahomomorphismus gibt $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n] \to R$

Bem.: V endlich-dim. $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}(V)$ Ideal, $X = \mathcal{V}(\mathfrak{a})$. $\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(V)/\sqrt{\mathfrak{a}}$.

Dann ist $\mathcal{O}(X)$ eine reduzierte endlich erzeugte Algebra über $\mathbb{C}$.

Bew.: $\mathcal{O}(V) \cong \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ (nach Basiswahl)

$\mathcal{O}(X) = \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]/\sqrt{\mathfrak{a}} \twoheadleftarrow \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$

Hilberts Nullstellensatz

$V = \mathbb{C}^n$ $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}(V) = \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ Ideal. $X = \mathcal{V}(\mathfrak{a}) = \{x \in V \mid f(x) = 0 \ \forall f \in \mathfrak{a}\}$

$I(X) = \{f \in \mathcal{O}(V) \mid f|_X \equiv 0\}$. Dann gilt $I(X) = \sqrt{\mathfrak{a}}$

Bew.: Sei $f \in I(X)$ also $f|_X \equiv 0$. Sei $R = \mathbb{C}[x_0, x_1,\dots,x_n]$. Sei $\mathfrak{b} = (\mathfrak{a}, 1 - x_0 f)$ Ideal in R

Dann ist $v(b) = \emptyset$. Denn $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ mit $(a_0, \dots, a_n) \in v(b)$.

Also: $\forall g \in \mathfrak{a}$: $g(a_1, \dots, a_n) = 0$ also folgt $(a_1, \dots, a_n) \in X$. Somit gilt:

$0 = (1 - x_0 f)(a_0, a_1, \dots, a_n) = 1 - a_0 f(a_1, \dots, a_n) = 1$ ↯ Also $v(b) = \emptyset$

<u>Beh.</u>: $v(b) = \emptyset \Rightarrow 1 \in b$

<u>Folgerung</u>: $1 \in b$ bedeutet $\exists f_i \in \mathfrak{a}$ und $g_i \in R$ mit $1 = \sum_{i=1}^{r} g_i f_i + h(1 - x_0 f)$

Auf offener Teilmenge: $f(x) \neq 0$ kann man x_0 durch $\frac{1}{f}$ ansetzen

$\Rightarrow 1 = \sum g_i(\frac{1}{f}, x_1, \dots x_n) f_i + \underbrace{h(1 - \frac{f}{f})}_{=0}$

Sei m maximal, so dass f^m im Nenner auftaucht. Multipliziere mit f^m

$f^m = \sum_{i=1}^{r} \underset{\underset{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]}{\cap}}{g_i'} f_i \Rightarrow f^m \in \mathfrak{a}$ da $f_1, \dots, f_r \in \mathfrak{a}$

Es bleibt zu zeigen $v(b) = \emptyset \Leftrightarrow 1 \in b$ (Äquivalent: $v(b) = \emptyset \Leftrightarrow b = R$)

Ann.: b Ideal $\wedge$ $v(b) = \emptyset$ $\wedge$ b echtes Ideal. Sei $\mathfrak{M} \supset b$ maximales Ideal, da $v(\mathfrak{M}) \subseteq v(b) = \emptyset$, also OE b maximal

Dann ist $K = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/b$ ein Körper. Als Vektorraum über $\mathbb{C}$ hat $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ abzählbare Basis, die Monome $x_1^{m_1}, x_2^{m_2}, \dots, x_n^{m_n}$, $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Damit hat auch K eine abzählbare Basis. Angenommen $K \neq \mathbb{C}$, sei $p \in K - \mathbb{C}$, da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist p nicht Nullstelle eines Polynoms $\Rightarrow p$ transzendent

Dann sind die Elemente $\{\frac{1}{p-a} ; a \in \mathbb{C}\} \subseteq K$ linear unabhängig über $\mathbb{C}$.

Denn angenommen sie wären linear abhängig: $\exists a_1, \dots, a_r, c_1, \dots, c_r \in \mathbb{C}$ mit

$c_1 \frac{1}{p - a_1} + c_2 \frac{1}{p - a_2} + \dots + c_r \frac{1}{p - a_r} = 0$ Multipliziere mit $\prod_{i=1}^{r} (p - a_i)$

$c_1 \prod_{j \neq 1} (p - a_j) + c_1 \prod_{j \neq 2} (p - a_j) + \dots + c_r \prod_{j \neq r} (p - a_j) = 0 \Rightarrow p$ ist Nullstelle des Polynoms:

$\sum_{i=1}^{r} c_1 \prod_{j \neq 1} (x - a_j) \in \mathbb{C}[x]$ ↯

Damit ist gezeigt, $K = \mathbb{C}$, d.h. $\exists a_1, a_2, \dots, a_n$ mit $x_1 \equiv a_1 \pmod{b}$, $x_2 \equiv a_2 \pmod{b}, \dots$ $x_n \equiv a_n \pmod{b} \Leftrightarrow x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n \in b$. Somit $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \subseteq b$

Aber $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ ist ein maximales Ideal, da $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) = \mathbb{C}$ ein Körper. Also $b = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ und somit $v(b) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ und damit $v(b) \neq \emptyset$ ↯ Ergo: $v(b) = \emptyset \Leftrightarrow b = \mathcal{O}(V) \Leftrightarrow 1 \in b$ $\square$

<u>Def.</u> (Version 2): Ein Paar $(X, \mathcal{O}(X))$ bestehend aus einer Menge X und einer $\mathbb{C}$-Algebra von Funktionen $\mathcal{O}(X)$ auf X heißt <u>affine Varietät</u> falls $\exists Z \subseteq \mathbb{C}^n$, Z abgeschlossen (Zariski-Topologie)

und $\exists$ Bijektion $\varphi: X \to Z$, so dass die Abbildung $\varphi^*: \mathcal{O}(Z) \ni f \mapsto f \circ \varphi \in (\mathcal{O}(X))$

Isomorphismus ist. Man nennt $\mathcal{O}(X)$ den <u>Koordinatenring</u> von X.

Zariski-Topologie auf X: abgeschlossenen Teilmengen von X sind die von der Form:

$\mathcal{V}(\mathfrak{a}) = \{x \in X \mid f(x) = 0 \ \forall f \in \mathfrak{a}\}$ $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}(X)$ Ideal

<u>Bem.</u>: $\varphi: X \to Z$ Bijektion. Auf Z nehme die induzierte Topologie, d.h. abgeschl. Teilmengen von Z sind von der Form $Y = A \cap Z$, $A \in \mathbb{C}^n$ abgeschlossen. Dann ist φ ein Homöomorphismus.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{1:1} & Z \hookrightarrow \mathbb{C}^n \\ \cup & & \\ X' & \longrightarrow & Z' = \varphi(X') \\ \| & & \| \\ \mathcal{V}(\mathfrak{a}) & & \mathcal{V}(\varphi^{*-1}(\mathfrak{a})) \\ & & \| \\ & & \{z \in Z \mid f(z) = 0 \ \forall f \in \varphi^{*-1}(\mathfrak{a})\} \end{array}$$

$$\mathcal{O}(X) \xleftarrow[\sim]{\varphi^*} \mathcal{O}(Z) \xleftarrow{i^*} \mathcal{O}(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \qquad i^*: \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \to \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I(Z)$$

Das Urbild eines Ideals ist ein Ideal, sei $\mathfrak{b} = (i^{*-1} \circ \varphi^{*-1})(\mathfrak{a})$. Was ist $\mathcal{V}(\mathfrak{b})$?

Wissen $I(Z) \subseteq \mathfrak{b} \Rightarrow \mathcal{V}(\mathfrak{b}) \subseteq Z$. Also um $\mathcal{V}(\mathfrak{b})$ zu berechnen reicht es für $f \in \mathfrak{b}$, $\mathcal{V}(f) \cap Z$ zu betrachten für alle $f \in \mathfrak{b}$. Das bedeutet: Man muss sich eigentlich nur noch die Funktion $\bar{f}$ in $\mathcal{O}(Z) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I(Z)$ anschauen, also muss man sich anschauen:

$\mathcal{V}(\underbrace{\mathfrak{b}/I(Z)}_{\varphi^{*-1}(\mathfrak{a})}) = \mathcal{V}(\varphi^{*-1}(\mathfrak{a})) = Z'$, also $\mathcal{V}(\mathfrak{b}) = Z'$.

Somit: $X' \subset X$ abgeschlossen $\Rightarrow \varphi(X') \subset Z$ abgeschlossen in der induzierten Topologie. Umgekehrt sei $Z' \subset Z$ abgeschlossen in der induzierten Topologie, also: $\exists\, \mathfrak{b} \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, so dass

$$Z' = \mathcal{V}(\mathfrak{b}) \cap Z = \mathcal{V}(\mathfrak{b} \cup I(Z)) \cap Z = \mathcal{V}(\underbrace{(\mathfrak{b}, I(Z))}_{\tilde{\mathfrak{b}}}) \cap Z = \mathcal{V}(\tilde{\mathfrak{b}})$$

Betrachte: $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \to \mathcal{O}(Z) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{O}(Z) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I(Z) & & \\ \tilde{\mathfrak{b}} & \longrightarrow & \underset{\text{Ideal}}{\mathfrak{a} = \tilde{\mathfrak{b}}/I(Z)} & \longrightarrow & \varphi^*(\mathfrak{a}) \\ \mathcal{V}(\tilde{\mathfrak{b}}) & = & \mathcal{V}(\mathfrak{a}) = Z' & \xrightarrow{1:1} & \mathcal{V}(\varphi^*(\mathfrak{a})) = X' = \varphi^{-1}(Z') \end{array}$$

Also auch $\varphi^{-1}(\text{abgeschlossen}) = \text{abgeschlossen}$.

R eine endlich-erzeugte $\mathbb{C}$-Algebra, reduziert (ohne nilpotente Elemente), endlich erzeugt heißt $\exists\, f_1, \dots, f_r \in R$, mit $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] & \xrightarrow{\pi} & R \\ x_i & \longmapsto & f_i \end{array}$ ist surjektiv.

Sei $\mathfrak{a} = \ker \pi$, dann ist $\mathfrak{a}$ ein Radikalideal, denn: $h \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_r]$, $h^m \in \mathfrak{a} \Rightarrow \bar{h} \in R$ hat Eigenschaft $\bar{h}^m = 0$ in $R = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_r]/\mathfrak{a}$, also $\bar{h} = 0$, da R keine nilpotenten Elemente hat, also $h \in \mathfrak{a}$. $\square$

<u>Beachte</u>: Sei $X \subseteq \mathbb{C}^r$ die Nullstellenmenge von $\mathfrak{a}$, also: $X = \mathcal{V}(\mathfrak{a})$ (1). Dann ist

$$\mathcal{O}(X) = \mathbb{C}[x_1,..,x_r]/\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathbb{C}[x_1,..,x_r]/\mathfrak{a} \cong R$$

Sei X als Menge $= \mathfrak{m}\operatorname{Spec} R =$ Menge der maximalen Ideale in R. (2)

Vorher: Punkte in X gemäß (1) entsprechen maximalen Idealen in $\mathcal{O}(X) = R$ also den Elementen von X gemäß (2).

X gemäß (1), x ein Punkt. $\mathfrak{m}_x = \{ f \in \mathcal{O}(X) = R \mid f(x) = 0 \}$. $\mathfrak{m}_x$ ist ein Ideal

<u>Beachte</u>: $\mathfrak{m}_x \to R = \mathcal{O}(X) \to \mathbb{C} \to 0$, $f \mapsto f(x)$ also $R/\mathfrak{m}_x \cong \mathbb{C}$ d.h. $\mathfrak{m}_x$ ist ein max. Ideal.

Umgekehrt: Nullstellensatz von Hilbert liefert: $\mathfrak{m}$ max. Ideal in $R \Rightarrow R/\mathfrak{m} \cong \mathbb{C}$.

Also $\mathbb{C}[x_1,...,x_r] \xrightarrow{\psi} R$, $\tilde{\mathfrak{m}} = \psi^{-1}(\mathfrak{m}) \to \mathfrak{m}$ (mit $\mathfrak{m} \subseteq R$) | Damit ist $\tilde{\mathfrak{m}}$ ein max. Ideal und Hilbert sagt:

$$\mathcal{V}(\tilde{\mathfrak{m}}) = 1 \text{ Punkt}$$
$$\mathcal{V}(\tilde{\mathfrak{m}}) = \mathcal{V}(\mathfrak{m}) \text{ in } X \subseteq \mathbb{C}^r$$

Sei $X = \mathfrak{m}\operatorname{Spec} R$. $f \in R$, will f als Funktion sehen auf X! R $\mathbb{C}$-Algebra: $\mathbb{C}\cdot 1 \subset R$.

$\mathfrak{m} \in X$, $\mathfrak{m}$ max. Ideal $\Rightarrow$ $\underbrace{\mathbb{C}\cdot 1 \hookrightarrow R/\mathfrak{m}}_{\sim} \cong \mathbb{C}$.

<u>Def.</u>: $f(\mathfrak{m}) := \bar{f}$ in $R/\mathfrak{m} = \mathbb{C}$.

X wie in (1) $f \in \mathcal{O}(X) = R$. Sei $x = \mathcal{V}(\mathfrak{m})$ der Punkt zu $\mathfrak{m}$ in X.

<u>Beh.</u>: $f(x) = f(\mathfrak{m})$

$$f = f(x)\cdot 1 + \underbrace{(f - f(x)\cdot 1)}_{\in \mathfrak{m}}$$

Damit folgt: In $R/\mathfrak{m}$ gilt $\bar{f} = \overline{f(x)\cdot 1 + (f - f(x)\cdot 1)} = \overline{f(x)\cdot 1} = f(x)$

via der Identifizierung $\mathbb{C} = \mathbb{C}\cdot 1 \subseteq R$

<u>Satz</u>: $(X = \mathfrak{m}\operatorname{Spec} R, R)$ ist eine affine Varietät im Sinne von Def. (Version 2)

<u>Bew.</u>: Sei $(Z, \mathcal{O}(Z) = R)$ wie eben konstruiert, d.h. $Z \subseteq \mathbb{C}^r$, $\psi: \mathbb{C}[x_1,...,x_r] \to R$, $x_i \mapsto f_i$.

$I = \ker \psi$, $Z = \mathcal{V}(I) \subseteq \mathbb{C}^r$. <u>Notation</u>: $x \in X$, $\mathfrak{m}_x$ zugehöriges maximales Ideal.

$\varphi(x) = ?$: $\mathfrak{m}_x$ max. Ideal. $\tilde{\mathfrak{m}}_x = \psi^{-1}(\mathfrak{m}_x)$

$\tilde{\mathfrak{m}}_x \subseteq \mathbb{C}[x_1,...,x_r]$ max. Ideal, denn: Beachte: $0 \in \mathfrak{m}_x \Rightarrow I = \psi^{-1}(0) \subseteq \psi^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \tilde{\mathfrak{m}}_x$

$$\mathbb{C}[x_1,...,x_r]/\tilde{\mathfrak{m}}_x = \frac{\mathbb{C}[x_1,...,x_r]/I}{\tilde{\mathfrak{m}}_x/I} = R/\mathfrak{m}_x = \mathbb{C}$$

Also: $\tilde{\mathfrak{m}}_x$ max. Ideal $\underset{\text{Hilbert}}{\Rightarrow} \exists\, a_1,...,a_r \in \mathbb{C}$ mit $\tilde{\mathfrak{m}}_x = (x_1 - a_1, x_2 - a_2, ..., x_r - a_r) \Rightarrow \mathcal{V}(\tilde{\mathfrak{m}}_x) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^r$

Beachte: $I \subseteq \tilde{\mathfrak{m}}_x \Rightarrow \mathcal{V}(I) \supseteq \mathcal{V}(\tilde{\mathfrak{m}}_x)$ also $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} = \mathcal{V}(\tilde{\mathfrak{m}}_x) \in Z$

Das bedeutet aber auch: $\mathcal{V}(\mathfrak{m}_x) = \{ z \in Z \mid f(z) = 0 \ \forall f \in \mathfrak{m} \} = \mathcal{V}(\tilde{\mathfrak{m}}_x)$

Bekommen Abb. $\varphi: X \to Z$
$x \mapsto v(\mathfrak{m}_x) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} \in Z \subseteq \mathbb{C}^r$

Abb. ist injektiv nach Konstruktion, da $a_1, \dots, a_r$ durch $\psi^{-1}(\mathfrak{m}_x)$ eindeutig festgelegt.

Surjektivität: Sei $z \in Z$, $\mathfrak{m}_z = \{ f \in R \mid f(z) = 0 \}$. Dann ist $\psi^{-1}(\mathfrak{m}_z) = \{ f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_r] \mid f(z) = 0 \}$

Für $z = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix} \in Z \subseteq \mathbb{C}^r$ folgt: $\tilde{\mathfrak{m}}_z = \psi^{-1}(\mathfrak{m}_z) = (x - b_1, \dots, x - b_r)$ ist max. Ideal.

$\Rightarrow \mathbb{C} = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_r] / \tilde{\mathfrak{m}}_z = \dfrac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_r]/I}{\tilde{\mathfrak{m}}_z / I} = R/\mathfrak{m}_z \Rightarrow \mathfrak{m}_z$ ist max. Ideal.

Damit 1. Schritt erledigt: $\varphi: X \to Z$
$x \mapsto v(\mathfrak{m}_x)$
$\{ f \mid f(z) = 0 \} = \mathfrak{m}_z \leftarrow\!| z \quad : \varphi^{-1}$

Bleibt zz: $\varphi^*: \mathcal{O}(Z) \to \mathcal{O}(X)$, $f \mapsto f \circ \varphi$ ist ein Isomorphismus.

Sei $f \in \mathcal{O}(Z)$ ("$=$" R). $\varphi^*(f): X \to \mathbb{C}$
$x \mapsto f(v(\mathfrak{m}_x)) = f(\varphi(x))$

Andererseits definiert als Funktion auf X durch $f(x) = \bar{f}$ in $R/\mathfrak{m}_x = \mathbb{C}$.

Sei $z = \varphi(x) = v(\mathfrak{m}_x)$. Insbesondere $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}_z = \{ f \in R \mid f(z) = 0 \}$

$f = f(z) + (f - f(z))$. Das bedeutet für f, gesehen als Funktion auf X:

$f(x) = \bar{f}$ in $R/\mathfrak{m}_x = \bar{f}$ in $R/\mathfrak{m}_z = \overline{f(z) + \underbrace{(f - f(z))}_{\in \mathfrak{m}_z}}$ in $R/\mathfrak{m}_z$. Also: $f(x) = \overline{f(z)}$ in $R/\mathfrak{m}_z = \mathbb{C}$
$= f(z)$ in $\mathbb{C} = R/\mathfrak{m}_z$

Somit gilt: $f(x)$ für f gesehen als Funktion auf X ist gleich $\varphi^*(f)(x) = f(\varphi(x)) = f(z)$ für f gesehen als Funktion auf Z und via φ als Funktion auf X.

Damit ist φ^* offensichtlich ein Isomorphismus. $\square$

<u>Bsp.</u>: $R = \mathbb{C}[x, y]$, $I = (y - x^2)$. I ist Radikalideal, denn:

<u>Beh.</u>: $\mathbb{C}[t] \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}[x, y]/I$ ist ein Isomorphismus.
$t \longmapsto \bar{x}$

Beachte: I Radikalideal $\Leftrightarrow \mathbb{C}[x, y]/I$ hat keine nilpotenten Elemente. $f^m \in I \Leftrightarrow \bar{f}^m = 0$

$\mathbb{C}[t]$ hat keine nilpotenten Elemente $\Rightarrow \mathbb{C}[x, y]/I$ hat keine nilpotenten Elemente $\Rightarrow I$ Radikalideal

<u>Bew. d. Beh.</u>: 1.) zz π surjektiv. Wissen $x^i y^j$ Basis v. $\mathbb{C}[x, y]$ als <u>$\mathbb{C}$-Vektorraum</u>.

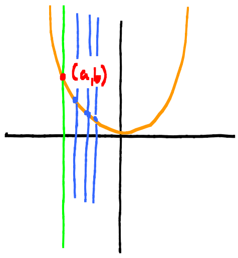
$\Rightarrow \overline{x^i y^j}$ in $\mathbb{C}[x, y]/I$ bilden Erzeugendensystem. Aber $\overline{x^i y^j} = \overline{x^{i+2j}} = \pi(t^{i+2j})$

// In $\mathbb{C}[x, y]/I$ gilt $\overline{y - x^2} = 0 \Leftrightarrow \bar{y} = \bar{x}^2$.

Somit folgt: Im π enthält Erzeugendensystem von $\mathbb{C}[x, y]/I$ als Vektorraum/$\mathbb{C}$ $\Rightarrow \pi$ surjektiv

2.) zz π injektiv. Angenommen: $\pi\left(\sum_{i=0}^m a_i t^i\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^m a_i \overline{x^i} = 0$ in $\mathbb{C}[x, y]/I$

$\Rightarrow \sum_{i=0}^m a_i x^i \in I \Rightarrow \sum_{i=0}^m a_i x^i \Big|_{v(I)} \equiv 0$



Beachte: Nullstellenmenge von $\sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ ist unabhängig von Variable y.

Zeichnung $\Rightarrow \sum a_i x^i$ hat ∞-viele Nullstellen $\Rightarrow \sum a_i x^i =$ Nullpolynom

$\Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0 \Rightarrow \pi$ injektiv.

$Z = V(I)$, $I = (y - x^2) \Rightarrow \mathcal{O}(Z) = \mathbb{C}[x,y]/(y-x^2)$

Wissen: $\mathcal{O}(Z) \simeq \mathbb{C}[t]$ Abstrakt: $(\mathfrak{m}\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[t])$, $(\mathbb{C}, \mathbb{C}[t])$

Bsp.: $R = \mathbb{C}[x,y]$, $I = (xy - 1)$. I ist ein Radikalideal denn

$\pi: \mathbb{C}[t, t^{-1}] \to \mathbb{C}[x,y]/I$ ist ein Isomorphismus. Also $\mathbb{C}[t,t^{-1}]$ keine nilpotenten Elemente

$t \mapsto \bar{x}$

$t^{-1} \mapsto \bar{y}$ $\Rightarrow \mathbb{C}[x,y]/I$ keine nilpotente Elemente $\Rightarrow I$ Radikalideal.

Beweis: 1.) Surjektiv. $x^i y^j$ Basis für $\mathbb{C}[x,y]$ als $\mathbb{C}$-VR $\Rightarrow x^i y^j$ Erzeugendensys.

Aber $\overline{x^i y^j} = \begin{cases} i \le j: & \overline{y^{j-i}} \\ i > j: & \overline{x^{i-j}} \end{cases}$ in $\mathbb{C}[x,y]/I$ // $\overline{xy - 1} = 0 \Leftrightarrow \overline{xy} = 1$

$= \begin{cases} \pi(t^{i-j}) & i \le j \\ \pi(t^{i-j}) & i > j \end{cases}$

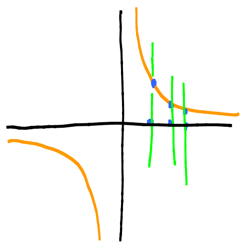
Somit folgt: $\mathrm{Im}\,\pi$ enthält Erzeugendensystem von $\mathbb{C}[x,y]/I$ als Vektorraum$/\mathbb{C} \Rightarrow \pi$ surjektiv

2.) Injektiv: Angenommen $f \in \ker \pi \Rightarrow t^m f \in \ker \pi$ $\forall m \in \mathbb{N}$ da $\ker \pi$ ein Ideal.

Also wenn $\ker \pi \neq \{0\} \Rightarrow \exists$ Polynom $a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m \in \ker \pi$.

$\Rightarrow$ Polynom: $\overline{a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m} = 0$ in $\mathbb{C}[x,y]/I$

$\Rightarrow a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m \in I \Rightarrow a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m = 0$ auf $V(I) = V(xy - 1)$



Zeichnung: Da Nullstellen unabhängig von y-Koordinate.

$\Rightarrow$ Das Polynom verschwindet auf ganz $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow$ Polynom $= 0 \Rightarrow$ Injektiv

Also: $Z = V(I) \subseteq \mathbb{C}^2$. $\mathcal{O}(Z) = \mathbb{C}[x,y]/I \simeq \mathbb{C}[t, t^{-1}]$

3. Spezielle offene Mengen

$(X, \mathcal{O}(X))$ affine algebraische Varietät

$f \in \mathcal{O}(X)$ $X_f := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ ist offene Teilmenge

Def.: X_f nennt man eine spezielle offene Teilmenge

Lemma: Die X_f bilden eine Basis der Topologie

Bew.: $U \subset X$ offen, $x \in U \Rightarrow U^c = X - U$ abgeschlossen

$\Rightarrow \exists f \in \mathcal{O}(X) : f|_{U^c} \equiv 0,\ f(x) \neq 0$

$\Rightarrow X_f := \{ z \in X \mid f(z) \neq 0 \},\quad x \in X_f \subset U$ □

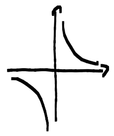
Def.: $\mathcal{O}(X)_f = \{ \frac{g}{f^i} \mid g \in \mathcal{O}(X) \} \big/ \frac{g}{f^i} \sim \frac{g'}{f^j}$ falls $gf^j = g'f^i$

Satz: $(X_f, \mathcal{O}(X)_f)$ selbst eine affine Varietät, genauer $X_f = \operatorname{Mspec} \mathcal{O}(X)_f$ (Also $\mathcal{O}(X_f) = \mathcal{O}(X)_f$)

Bew.: OE Sei $X = V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{C}^n$, $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$. Sei $\hat{X} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ definiert durch

$$\hat{X} = V(\mathfrak{a}, f x_{n+1} - 1)$$

Bsp.: $\mathbb{C}^*$ identifiziere $xy - 1 = 0$



Sei $p_{n+1} : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^n$, $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. Sei $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \in \hat{X} \Rightarrow h(a_1,\dots,a_n) = 0\ \forall h \in \mathfrak{a}$

$\Rightarrow p_{n+1}(a_1,\dots,a_{n+1}) \in X$

Außerdem gilt: $f\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} a_{n+1} = 1 \Rightarrow f\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \neq 0$

Also: $p_{n+1} : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^n$ induziert $p_{n+1} : \hat{X} \to X_f$.

Die Abb. ist injektiv: $p_{n+1}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = p_{n+1}\begin{pmatrix} a_1' \\ \vdots \\ a_{n+1}' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1' \\ \vdots \\ a_n' \end{pmatrix}$ und zusätzlich gilt:

$$a_{n+1} = 1/f(a_1,\dots,a_n) = 1/f(a_1',\dots,a_n') = a_{n+1}'$$

Sei $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in X_f$, dann gilt $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ a_{n+1} = 1/f(a_1,\dots,a_n) \end{pmatrix} \in \hat{X}$ denn $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in X \Rightarrow h(a_1,\dots,a_n) = 0\ \forall h \in \mathfrak{a}$

und $f(a_1,\dots,a_n) a_{n+1} - 1 = 0$.

Also p_{n+1} definiert bijektive Abb. $X_f \to \hat{X}$. OE können wir annehmen $\mathfrak{a}$ ist ein Radikalideal, also $\mathcal{O}(X) = \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]/\mathfrak{a}$.

Betrachte den Ring $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_{n+1}]/(\mathfrak{a}, f x_{n+1} - 1) \cong \mathcal{O}(X)[x_{n+1}]/(f \cdot x_{n+1} - 1)$

Übung: Dieser Ring hat keine nilpotenten Elemente

Also: $\mathcal{O}(\hat{X}) = \mathcal{O}(X)[x_{n+1}]/(f \cdot x_{n+1} - 1)$ Betrachte $\mathcal{O}(\hat{X}) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}(X)_f$

$$g = \sum_{i=0}^m g_i x_{n+1}^i \mapsto \sum_{i=0}^m g_i \frac{1}{f^i}$$

Beachte: $f x_{n+1} - 1 \mapsto f \cdot \frac{1}{f} - 1 = 0$. φ ist surjektiv, denn Elemente in $\mathcal{O}(X)_f$ sind Linearkombinationen der Form $\frac{g}{f^m}$, $g \in \mathcal{O}(X) \Rightarrow$ Bilder von $g x_{n+1}^m$.

φ ist injektiv: Sei $g \in \mathcal{O}(\hat{X})$, $g = \sum_{i=0}^m g_i x_{n+1}^i$, angenommen $\varphi(g) = 0$.

$\varphi(g) = \sum_{i=0}^m \frac{g_i}{f^i} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^m g_i f^{m-i} = 0$. Damit folgt: $g = g - x_{n+1}^m \sum_{i=0}^m g_i f^{m-i}$

$= \sum_{i=0}^m g_i x_{n+1}^i - \sum_{i=0}^m g_i f^{m-i} x_{n+1}^m = \sum_{i=0}^m g_i x_{n+1}^i (1 - f^{m-i} x_{n+1}^{m-i})$. Beachte: $(1 - y^l)$ ist teilbar durch $(1-y)$, denn $(1-y^l) = (1-y)(1 + y + y^2 + \dots + y^{l-1})$. Somit ist g teilbar durch $(1 - x_{n+1} f)$

also liegt in $(\mathfrak{a}, 1-x_{n+1}f)$.

$\varphi: \mathcal{O}(\hat{X}) \to \mathcal{O}(X)_f$ definiert Isomorphismus

$\mathcal{O}(\hat{X}) = \mathcal{O}(X)[x_{n+1}]/(1-x_{n+1}f)$

$g=\sum_{i=0}^{m} g_i x_{n+1}^i \mapsto \sum_{i=0}^{m} g_i \frac{1}{f^i}$ Frage: Warum ist $(p_{n+1}^{-1})^* = \varphi$?

$$p_{n+1}: \hat{X} \to X_f, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad p_{n+1}^{-1}: X_f \to \hat{X}, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ 1/f(a_1,\dots,a_n) \end{pmatrix}$$

Sei $g \in \mathcal{O}(\hat{X}) = \mathcal{O}(X)[x_{n+1}]/(fx_{n+1}-1)$.

Dann ist $(p_{n+1}^{-1})^*(g)$ die Funktion: $X \to \mathbb{C}$

$$x \mapsto p_{n+1}^{-1}(x) \xrightarrow{g} \mathbb{C}$$
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ 1/f(a_1,\dots,a_n) \end{pmatrix}$$

Für $g=\sum_{i=0}^{m} g_i x_{n+1}^i$, dann ist $(p_{n+1}^{-1})^*(g)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = g\left(p_{n+1}^{-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right) = g\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ 1/f(a_1,\dots,a_n) \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{m} g_i x_{n+1}^i \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ 1/f(a_1,\dots,a_n) \end{pmatrix}$

$$= \sum g_i(a_1,\dots,a_n) \frac{1}{f(a_1,\dots,a_n)^i} = \left(\sum g_i \frac{1}{f^i}\right)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \varphi(g)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Somit wird $(X_f, \mathcal{O}(X)_f)$ durch $p_{n+1}^{-1}: X_f \to \hat{X}$ und $\varphi = (p_{n+1}^{-1})^*: \mathcal{O}(\hat{X}) \to \mathcal{O}(X)_f$ zu eine affine Varietät.

Bsp.: $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}_x$ ist affine Varietät, $\mathcal{O}(\mathbb{C}^*) = \mathbb{C}[x]_x = \mathbb{C}[x, x^{-1}]$

$GL_n(\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C})_{\det}$ ist affine Varietät, mit $\mathcal{O}(GL_n) = \mathbb{C}[x_{ij}][\frac{1}{\det}]$

Def.: Eine lineare algebraische Gruppe ist eine Zariski Teilmenge einer $GL_n(\mathbb{C})$, die selbst eine Gruppe ist.

Bsp.: $SL_n(\mathbb{C}) = \{g \in GL_n(\mathbb{C}) \mid \det g - 1 = 0\}$

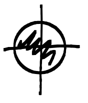
$T_n = \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$, $U_n = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$, $B_n = \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$, $O_n(\mathbb{C}) = \{g \in GL_n(\mathbb{C}),\ g^t g = \mathbb{1}\}$

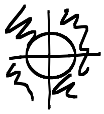
4. Irreduzible Komponenten

Def.: $(X, \mathcal{O}(X))$ affine Varietät. X heißt irreduzibel falls X nicht geschrieben werden kann als $X = A \cup B$, $A, B \subsetneq X$ abgeschlossen.

Bsp.: $\mathbb{C}$ ist irreduzibel. Denn $\mathbb{C} = A \cup B$, $A, B \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen, dann $A = \mathbb{C}$ oder $B = \mathbb{C}$, da sonst $|A \cup B| \leq |A| + |B| < \infty$.

Bem.: Achtung in der üblichen $\mathbb{C}$-Topologie macht diese Definition keinen Sinn.

$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$? 

$B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ $\hat{=}$  $A, B \subsetneq \mathbb{C}$ abgeschlossen und $\mathbb{C} = A \cup B$

Bem.: X ist irreduzibel $\Leftrightarrow$ $\forall U \subset X$ offen, $U \neq \emptyset$ $\bar{U} = X$

Bew.: "$\Rightarrow$" Sei $U \subset X$ offen, $U \neq \emptyset$ $A = \bar{U}$, $B = U^c \Rightarrow X = A \cup B \overset{\text{irreduzibel}}{\Longrightarrow} A = X$ oder $B = X$

Da $B \neq X$ folgt $A = \bar{U} = X$.

"$\Leftarrow$" Sei $X = A \cup B$ mit $A, B \subseteq X$ abgeschlossen. Angenommen: $A \neq X$.

Sei $U = A^c$, dann ist U offen $\neq \emptyset$. Also ist $\bar{U} = X$. Da $X = A \cup B$ folgt

$A^c \subseteq B$, also $U \subseteq B \Rightarrow X = \bar{U} \subseteq B \Rightarrow B = X$.

Lemma 1: $(X, \mathcal{O}(X))$ affine alg. Varietät. Dann sind äquivalent:

(1) X irreduzibel

(2) $I(X)$ ist Primideal für $X \subseteq \mathbb{C}^n$, $I(X) = \{f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \mid f|_X \equiv 0\}$

(3) $\mathcal{O}(X)$ ist nullteilerfrei.

Erinnerung: Ideal $I \subset R$ heißt Primideal. $f \cdot g \in I \Rightarrow f \in I \vee g \in I$

nullteilerfrei heißt: $f \cdot g = 0$ in $R \Rightarrow f = 0 \vee g = 0$

Bew.: (1) $\Rightarrow$ (2)

$X \subset \mathbb{C}^n$, $I(X) = \{f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \mid f|_X \equiv 0\}$. Angenommen $p(x), g(x) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ mit

$p(x) \cdot g(x) \in I(X)$. Sei $A = \{x \in X \mid p(x) = 0\}$, $B = \{x \in X \mid g(x) = 0\}$

Da $p(x) \cdot g(x) \in I(X)$ folgt $A \cup B = X$. Da A und B abgeschlossen und X irreduzibel gilt:

Entweder $A = X$, also $p|_X = 0 \Rightarrow p \in I(X)$ oder $B = X$, also $g|_X = 0 \Rightarrow g \in I(X)$

(2) $\Rightarrow$ (3) Angenommen $I(X)$ ist Primideal, also $\mathcal{O}(X) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I(X)$. Seien $f, g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$

mit $\bar{f} \cdot \bar{g} = 0$ in $\mathcal{O}(X) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I(X)$ $\Leftrightarrow$ $f \cdot g \in I(X) \Rightarrow f \in I$, also $\bar{f} = 0$ $\vee$ $g \in I$, also $\bar{g} = 0$.

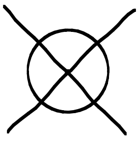
(3) $\Rightarrow$ (1) Angenommen $\mathcal{O}(X)$ ist nullteilerfrei. Sei $X = A \cup B$ mit $A, B \subseteq X$ abgeschlossen.

Angenommen $A, B \subsetneq X \Rightarrow \begin{array}{l} \exists f \in \mathcal{O}(X), f \neq 0, f|_A \equiv 0 \\ \exists g \in \mathcal{O}(X), g \neq 0, g|_B \equiv 0 \end{array} \Rightarrow f, g \neq 0$ aber $f \cdot g \equiv 0$ auf X $\lightning$

da f, g Nullteiler im Widerspruch zur Annahme.

$\square$

Bsp.: $V(f)$ mit $f = (x^2 + y^2 - 1)(x^2 - y^2)$.

$V(f) =$  $V(x^2 + y^2 - 1) \cup V(x + y) \cup V(x - y)$

Basissatz von Hilbert: Jedes Ideal in $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ ist endlich erzeugt.

Def. 2: Ein Ring R heißt noethersch, falls jedes Ideal in R endlich erzeugt ist, d.h.

$\forall I \subset R$ $\exists f_1, \dots, f_r \in I : I = (f_1, \dots, f_r)$

Bsp.: $\mathbb{Z} \supset I$, sei $a \in I$ mit $|a|$ minimal, $a \neq 0 \Rightarrow I = (a)$, denn $b \in I$, $b = aq + r$

mit $\begin{cases} r = 0 \Rightarrow b \in (a) \\ r \neq 0 \Rightarrow r = b - aq \in I \end{cases}$ $\quad 0 \leq r < |a|$ $\lightning$ zur Minimalität von (a)

Hauptidealringe sind alle noethersch.

Bsp.: K Körper, $K[x]$ ist Hauptidealring, Bew. der gleiche wie für $\mathbb{Z}$

Satz 1: Sei R noethersch, $I \subset R$ Ideal $\Rightarrow R/I$ noethersch

Bew.: $R' = R/I$, sei $J \subset R'$ Ideal, $\pi : R \to R' = R/I$. Sei $\tilde{J} = \pi^{-1}(J)$.

$\tilde{J}$ ist Ideal, endlich erzeugt. Also $\exists f_1, \dots, f_s \in \tilde{J} \subset R$ mit $\tilde{J} = (f_1, \dots, f_s)$

$\Rightarrow \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_s \subset J \subseteq R'$ erzeugen das Bild $\pi(\tilde{J}) = J$.

Korollar: Aus Hilbert's Basissatz folgt:

$(X, \mathcal{O}(X))$ affine Varietät $\Rightarrow \mathcal{O}(X)$ ist noethersch

Theorem 1: Sei R noethersch $\Rightarrow R[x]$ noethersch

Hilbert's Basissatz folgt aus dem Theorem, denn $\mathbb{C}$ ist noethersch.

$\Rightarrow \mathbb{C}[x_1]$ noethersch $\Rightarrow \mathbb{C}[x_1][x_2] = \mathbb{C}[x_1, x_2]$ noethersch $\Rightarrow \dots \Rightarrow \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ noethersch.

Bew.: 1) Fall K Körper $\Rightarrow \checkmark$ da $K[x]$ Hauptidealring

2) R beliebig

Sei $I \subset R[x]$ Ideal. Sei $J = \{ r \in R \mid \exists f \in I \text{ mit } r \text{ ist Leitkoeffizient} \} \cup \{0\}$

(Sei $f = r_n x^n + \dots + r_0$ mit $r_n \neq 0$, dann ist r_n Leitkoeffizient)

Lemma 2: $J \subset R$ ist Ideal

Bew.: Sei $\alpha \in J \Rightarrow \exists f \in I : f = \alpha x^n + r_{n-1} x^{n-1} + \dots + r_0$. Sei $r \in R$.

$\Rightarrow$ Entweder $r\alpha = 0$, also $r\alpha \in J$ oder $r\alpha \neq 0 \Rightarrow r\alpha$ Leitkoeffizient von rf.

Sei $\beta \in J$ ein weiteres Element, $\Rightarrow \exists g = \beta x^m + t_{m-1} x^{m-1} + \dots + t_0$

OE: $n \geq m \Rightarrow \alpha + \beta$ ist Leitkoeffizient von $f + x^{n-m} g$. Weiter gilt $-\alpha$ ist Leitkoeffizient von $(-1) f$. $\square$

Da R noethersch ist J endlich erzeugt, $J = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$. Seien $f_1, \dots, f_r \in I \subset R[x]$ mit Leitkoeffizient $l(f_i) = \alpha_i$. Indem man die f_i gegebenenfalls mit Potenzen von x multipliziert, kann man OE annehmen: Alle f_i haben Grad n. Sei $R_n = R \oplus Rx \oplus Rx^2 \oplus \dots \oplus Rx^n \subset R[x]$

R_n ist ein R-Modul. Sei $I_n = R_n \cap I$. Dann ist I_n als R-Modul endlich erzeugt.

Bew.: $n = 0$, $R_0 = R$, ein R-Untermodul von R ist ein Ideal. Da R noethersch, ist jede Untermodul endlich erzeugt. $I = (f_1, \dots, f_r) \Rightarrow I = Rf_1 + Rf_2 + \dots + Rf_r$

Betrachte $n \geq 1$. Sei $\pi : R_n \to R_{n-1}$ $\ker \pi = Rx^n$, als R-Modul ist $\ker \pi = Rx^n \cong R$. Sei $M \subseteq R_n$ ein Untermodul, sei $\bar{M} = \pi(M) \subseteq R_{n-1}$, dann ist $\bar{M}$ ein Untermodul, also endlich erzeugt, seien $\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_s \in \bar{M}$ mit $\bar{M} = R\bar{m}_1 + \dots + R\bar{m}_s$. Seien $m_1, \dots, m_s \in M$ mit $\pi(m_i) = \bar{m}_i$. Weiter sei $N = M \cap \ker\pi$.
Dann ist N ein Untermodul von $\ker \pi \cong R$, also endlich erzeugt, seien $n_1, \dots, n_t \in N$ mit $N = Rn_1 + \dots + Rn_t$. Sei M' = Untermodul von M erzeugt von $(n_1 \dots n_t, m_1, \dots m_s) = Rn_1 + Rn_2 + \dots + Rn_t + Rm_1 + \dots + Rm_s$. Sei $m \in M$, für $\bar{m} = \pi(m)$ gibt es $a_1, \dots, a_s \in R$ mit $\bar{m} = a_1\bar{m}_1 + \dots + a_s\bar{m}_s$, also gilt:

$$\pi(\underbrace{m - a_1\bar{m}_1 - \dots - a_s\bar{m}_s}_{\hat{m}}) = \bar{m} - a_1\bar{m}_1 - a_2\bar{m}_2 - \dots - a_s\bar{m}_s) = 0$$

$\Rightarrow \hat{m} \in M \cap \ker\pi = N \Rightarrow \exists\, b_1, \dots, b_t \in R$ mit $\hat{m} = b_1 n_1 + \dots + b_t n_t$
$\Rightarrow m = b_1 n_1 + \dots + b_t n_t + a_1 m_1 + \dots + a_s m_s \Rightarrow M' = M$ $\lrcorner$

Sei $h_1, \dots, h_s$ ein Erzeugendensystem, d.h. $I_n = Rh_1 + \dots + Rh_s$.

Beh.: $h_1, \dots, h_s, f_1, \dots f_r$ ist ein Erzeugendensystem von I

Bew.: Sei $g \in I$, wenn $g \in I_n \Rightarrow$ Linearkombination der $h_i \Rightarrow g \in I' = \langle h_1, \dots, h_s, f_1, \dots, f_r \rangle$.
Angenommen: $\operatorname{grad} g > n$. Sei $g = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_0$ mit $a_m \neq 0 \Rightarrow a_m \in J \subseteq R$
$\Rightarrow p_1, \dots, p_r \in R : a_m = \sum_{i=1}^r p_i a_i$. $\sum_{i=1}^r p_i x^{m-n} f_i = \left(\sum_{i=1}^r p_i a_i\right) x^m + \underbrace{\dots}_{\text{Terme kl. Grades}} = a_m x^m + \dots$
$\Rightarrow g - \sum_{i=1}^r p_i x^{m-n} f_i$ hat $\operatorname{grad} < m$, und da $g \in I$ und $\sum p_i x^{m-n} f_i \in I$ folgt $h = g - \sum p_i x^{m-n} f_i \in I$
Per Induktion: $h \in I$ $\operatorname{grad} < m \Rightarrow h \in I'$. Also: $g = \underset{\overset{\cap}{I'}}{h} + \underbrace{\sum p_i x^{m-n} f_i}_{\in I'} \in I' \Rightarrow I = I'$

Lemma 3: Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

a) R noethersch

b) Jede streng aufsteigende Kette von Idealen ist stationär

c) Jede nichtleere Menge von Idealen hat ein maximales Element.

Bew.: a) $\Rightarrow$ b)

Ann.: $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq I_3 \subsetneq \dots$ $I := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$. I ist ein Ideal: $f \in I \Rightarrow \exists i$ mit $f \in I_i$.
Sei $r \in R \Rightarrow rf \in I_i \Rightarrow rf \in I$. $f \in I \Rightarrow -f \in I$. $f, g \in I \Rightarrow \exists i, j$ mit $f \in I_i, g \in I_j$.
OE $j \geq i$: $f, g \in I_j \Rightarrow f+g \in I_j \Rightarrow f+g \in I = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$.
I ist endlich erzeugt $\Rightarrow \exists f_1, \dots, f_s \in I$ mit $I = (f_1, \dots, f_s)$. Es gibt daher ein k_0 mit $f_1, \dots, f_s \in I_{k_0} \Rightarrow \forall k > k_0 : I_k = I$ $\lightning$

b)⇒a) Sei I Ideal, $p_0 \in I - \{0\}$, $I_0 = (p_0)$. Wenn $I_0 \neq I \Rightarrow \exists p_1 \in I - I_0$. Setze $I_1 = (p_0, p_1)$
$\Rightarrow I_0 \subsetneq I_1$. Wenn $I_1 \neq I \Rightarrow \exists p_2 \in I - I_1$. Setze $I_2 = (p_0, p_1, p_2)$, dann $I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq I_2$
Da jede streng aufsteigende Folge von Idealen stationär wird findet man nach endlich vielen Schritten $p_0, p_1, \dots, p_s$ mit $I_s = (p_0, p_1, \dots, p_s) = I$.

b)⇒c) Aus der nichtleeren Menge von Idealen wähle eine totalgeordnete Teilmenge:
$I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \Rightarrow I = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j$ ist Ideal enthält alle I_j, aber da $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ stationär wird $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq n_0 : I_n = I_{n_0} \Rightarrow I = I_{n_0}$ ist maximales Element.

c)⇒a) Sei $I \subseteq R$ Ideal. Sei $p_0 \in I - \{0\}$, $I_0 = (p_0)$, $p_1 \in I - I_0$, $I_1 = (p_0, p_1)$, $p_2 \in I - I_1 \dots$
Wenn I nicht endlich erzeugt ist, dann erhält man eine streng aufsteigende Kette $I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq \dots$ Kette von Idealen, die offensichtlich kein max. Element hat. ↯

__Korollar:__ "Übersetzung in Geometrie" $(X, \mathcal{O}(X))$ affine Varietät.
a) $Y \subseteq X$ abgeschlossen $\Rightarrow \exists f_1, \dots, f_s \in \mathcal{O}(X) : Y = \{x \in X \mid f_1(x) = \dots = f_s(x) = 0\}$
b) Jede absteigende Folge von abgeschlossenen Teilmengen wird stationär.
c) Jede Teilmenge von abgeschlossenen Mengen hat ein minimales Element.

__Def.:__ X top. Raum heißt irreduzibel falls X kann nicht geschrieben werden als $X = A \cup B$ mit $A, B \subsetneq X$ und A, B abg.
($\Leftrightarrow$ Jede nichtleere offene Menge von X ist dicht)

__Theorem 2:__ $(X, \mathcal{O}(X))$ affine Varietät. Dann ist X die endliche Vereinigung von irred. abg. Teilmengen, d.h. $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$. Wenn diese Vereinigung nicht verkürzbar ist, d.h. $\nexists_{i,j} (X_i \subseteq X_j)$, dann sind die X_i maximal und damit eindeutig bestimmt.

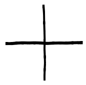
__Bew.:__ Existenz: (Benutze Korollar c))
$M := \{A \subseteq X \mid A \text{ abg und nicht die endliche Vereinigung von irred. abg. Teilmengen}\}$. Ang $M \neq \emptyset$
M besitzt minimales Element $A_0 \in X$ d.h. A_0 nicht irred., d.h. $\exists_{B, B' \subsetneq A_0 \text{ abg}} : A_0 = B \cup B'$
D.h. wegen Minimalität sind B, B' Vereinigung von endl. vielen irred. abg. Teilmengen $\Rightarrow A_0$ ebenso ↯
$\Rightarrow M = \emptyset \Rightarrow X$ endl. Vereinigung von irred. abg. Teilmengen.

Eindeutigkeit: (1) Zz $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$ nicht verkürzbar, dann sind die X_i maximal.
Sei also $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$ nicht verkürzbar, d.h. $\nexists_{i,j}\ X_i \subseteq X_j$. Ang. $Y \supsetneq X_s$ irred. abg. Teilmengen von X, dann $Y = Y \cap X = (X_1 \cap Y) \cup (X_2 \cap Y) \cup \dots \cup X_s \cup \dots \cup (X_r \cap Y)$
Aber $(X_i \cap Y) \subsetneq Y$ für alle $i \neq s$ denn $X_j \cap Y = Y$ für ein $j \Rightarrow Y \subseteq X_j \Rightarrow X_s \subsetneq Y \subseteq X_j$ ↯

da Vereinigung nicht verkürzbar. Da Y irred. (und $X_s \neq \emptyset$) folgt $(X_i \cap Y) = \emptyset$ für alle $i \neq s$ und $Y = X_s$ ↯ $\Rightarrow$ Alle X_i max.

(2) Diese Zerlegung ist eindeutig. Ang. $X = X_1 \cup \dots \cup X_r = Y_1 \cup \dots \cup Y_q$. seien zwei Zerlegungen (nicht verkürzbar). $\Rightarrow \exists_{i,j}\ Y_i \subseteq X_j$. D.h. wegen Max. $Y_i = X_j$ $\square$

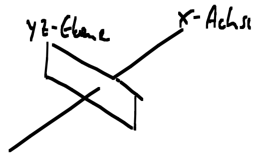
Bsp.: (1) $V(XY) \subseteq \mathbb{A}^2$



$\overset{\shortparallel}{\{(a,b) \in \mathbb{A}^2 \mid XY(a,b) = 0\}} = \{(a,b) \in \mathbb{A}^2 \mid ab = 0\} = \{ — \mid a = 0 \vee b = 0\} = \{ — \mid a = 0\} \cup \{ — \mid b = 0\}$

$= V(X) \cup V(Y)$

Allgemein: $V(X_1 X_2 \dots X_n) \subseteq \mathbb{A}^n \quad = V(X_1) \cup \dots \cup V(X_n)$



(2) $V(XY, XZ) \subseteq \mathbb{A}^3 \quad = \{(a,b,c) \in \mathbb{A}^3 \mid ab = 0 \wedge ac = 0\}$

$= \{(a,b,c) \in \mathbb{A}^3 \mid (a = 0 \vee b = 0) \wedge (a = 0 \vee c = 0)\}$

$= \{(a,b,c) \in \mathbb{A}^3 \mid (a = 0)\} \cup \{(a,b,c) \in \mathbb{A}^3 \mid b = 0 \wedge c = 0\}$ nicht verkürzbar

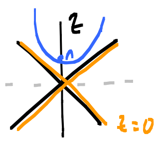
$V(XY, XZ) = V(Y,Z) \cup V(X) \cup V(X,Z)$ verkürzbar

enthalten

(3) Hyperfläche $\underset{H_1}{V(XY - Z)},\ \underset{H_2}{V(XZ - Y^2)} \subseteq \mathbb{A}^3$

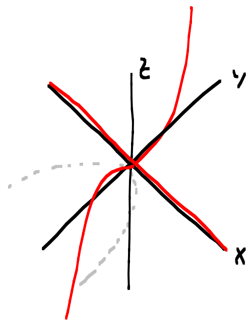
$X = H_1 \cap H_2$

Betrachte $V(XY - Z)$



Beh.: $X = V(Y,Z) \cup \underset{\{(a,a^2,a^3) \mid a \in \mathbb{C}\}}{\overset{\shortparallel}{C}}$

Bild



zu Fuß: $C,\ V(Y,Z) \subseteq X$
abg. & irred.

Sei $(a,b,c) \in X \setminus V(Y,Z)$ (Zz $b = a^2$, $c = a^3$)

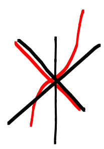
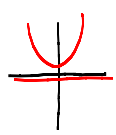
D.h. $b \neq 0 \vee c \neq 0 \Rightarrow b \neq 0$, denn $ab - c = 0 \Rightarrow a = cb^{-1}$ (*)

Es muss gelten $\begin{bmatrix} ab - c = 0 \\ ac - b^2 = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab = c \\ ac = b^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

(*) in (2): $cb^{-1}c = b^2 \Rightarrow c^2 = b^3 \Rightarrow (\underbrace{cb^{-1}}_{a})^2 = b \Rightarrow b = a^2 \xrightarrow{(1)} ab = (cb^{-1})(cb^{-1})^2 = c$

$\Rightarrow (\underbrace{cb^{-1}}_{a})^3 = c \Rightarrow a^3 = c$

Eleganter: $\mathbb{C}[X,Y,Z]/(XY - Z, XZ - Y^2) \xrightarrow[\varphi]{\sim} \mathbb{C}[X,Y]/(X^2Y - Y^2)$


$\leftrightarrow$


$$\begin{aligned} X &\longmapsto X \\ Y &\longmapsto Y \\ Z &\longmapsto XY \end{aligned}$$

wohldefiniert, surjektiv

Beh.: $\ker(\varphi) = (XY - Z, XZ - Y^2)$

(4) $O_2 = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid A A^t = \mathrm{Id}\}$

$$= \underbrace{\underbrace{O_2 \cap SL_2}_{SO_2}}_{\det 1} \cup \underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot SO_2}_{\det -1}$$

$\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^t = \underbrace{\frac{1}{ad-bc}}_{\pm 1}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix}d\\-c\end{pmatrix}$ Für $A \in SO_2$ gilt $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix}d\\-c\end{pmatrix}$

$\Rightarrow SO_2 = \left\{\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix} \mid a^2+b^2=1\right\}$ Genauso $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.SO_2 = \left\{\begin{pmatrix}a&b\\b&-a\end{pmatrix} \mid a^2+b^2=1\right\}$

Zerlegung in alg. Mengen. Warum irred.?

<u>Algebraisch</u>: Eine prinzipale Verschwindungsmenge ist irred., wenn die definierende Gleichung irred. ist.

prinzipal = Verschwindungsmenge eines Polynoms $= V(f)$ def. Gleichung $= f$

und $f \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ heißt irred. falls $f = gh \Rightarrow g \in \mathbb{C} \vee h \in \mathbb{C}$

Ziel: Das zu beweisen (Übersetzung des top. Begriffes in den algebraischen Kontext)

$O_2 = SO_2 \cup \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} SO_2$. Def. Gleichung von SO_2: $\det - 1$

<u>Beh.</u>: $\det - 1$ ist irred. (det ist polynomial)

Ang.: $\det - 1 = f \cdot g$

$\begin{pmatrix} & x_{ri} & \\ & x_{rs} & x_{is} \\ & & \end{pmatrix}$ Ang.: $x_{rs} \in f$ (d.h. $x_{rs} \notin g$)

Genauso $\forall i,j$ $x_{rj}, x_{is} \notin g \Rightarrow g \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \det - 1$ ist irred. Anwendung SO_2 ist irred. alg. Teilmenge von O_2

$f \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ heißt irreduzibel falls f keine Einheit ist und aus $f = gh$ folgt g ist Einheit oder h ist Einheit

Grad $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} = k_1 + k_2 + \dots + k_n$

$f = \sum_{i_1,i_2,\dots,i_n} a_{i_1,\dots,i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$: Grad $f = \max\{\sum_{j=1}^n i_j \mid a_{i_1,\dots,i_n} \neq 0\}$

Grad $2x_1^2 x_5^3 + x_2^2 x_4^6 - x_1^9 x_2^{10} = 19$

$f,g \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$, $n =$ Grad f, $k =$ Grad g, Grad $f \cdot g =$ Grad $f +$ Grad g

Es folgt: f nicht irreduzibel also $f = g \cdot h$, g,h keine Einheiten $\Rightarrow$ Grad g, Grad $h <$ Grad f

Per Induktion jedes Polynom ist ein Produkt von <u>irreduziblen Polynomen</u>.

$\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] \ni a + i\sqrt{5}\,b$ $a,b \in \mathbb{Z}$, $6 = 2 \cdot 3 = (1 - i\sqrt{5})(1 + i\sqrt{5})$. $2, 3, 1 - i\sqrt{5}, 1 + i\sqrt{5}$ irred.

<u>Satz 4</u>: In $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ gilt: f irreduzibel $\Leftrightarrow$ f ist Primelement

(Primelement: $f \mid g \cdot h \Rightarrow f \mid g \vee f \mid h$, f keine Einheit)

<u>Korollar 1</u>: Die Zerlegung von $f = f_1 \dots f_r$ als Produkt von irred. Elemente ist eindeutig bis

auf Reihenfolge und Multiplikation mit Einheiten, d.h. $f = g_1 \cdots g_r$ mit g_i irred. für $i = 1, \dots, r$, dann gilt $k = r$ und gegebenenfalls Umnummerierung. $\exists c_1, \dots, c_k \in \mathbb{C}^*$ (Einheiten) so dass $f_i = c_i g_i \quad \forall i = 1, \dots, k$ (f keine Einheit)

<u>Bew.:</u> $f = f_1 \cdots f_k = g_1 \cdots g_r \Rightarrow f_1 | f \Rightarrow f_1 | g_1 \cdots g_r \Rightarrow \exists i$ mit $f_1 | g_i$

Nach Umnummerierung, falls nötig: OE $f_1 | g_1$. Da g_1 irred. folgt $g_1 = f_1 \cdot h_1$, dass h_1 eine Einheit sein muss (da f_1 irred.). Also $\exists c_1 \in \mathbb{C}^*$ mit $f_1 = c_1 g_1$

$\Rightarrow f_1 f_2 \cdots f_k = g_1 g_2 \cdots g_r$ Kürzen! $f_2 \cdots f_k = c_1 g_2 \cdots g_r$ per Induktion $\Rightarrow k = r$ und $\exists c_2 \dots c_k$ mit $f_i = c_i g_i$, $i = 2, \dots, k$. □

<u>Bem.:</u> Man nennt $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ einen faktoriellen Ring.

<u>Allgemein:</u> Ein faktorieller Ring ist ein Ring mit einer eindeutigen Primfaktorzerlegung (Eindeutig bis auf Multiplikation mit Einheiten).

<u>Korollar 2:</u> $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, $V(f)$ irreduzibel $\Leftrightarrow f = g^n$, g irreduzibel

<u>Bew.:</u> Sei $V(f)$ irreduzibel $\Rightarrow I(V(f)) = \sqrt{(f)}$ mit $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I$ hat keine Nullteiler

$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I$ = Koordinatenring von $V(f)$

Sei $f = f_1^{p_1} f_2^{p_2} \cdots f_r^{p_r}$ Zerlegung von f als Produkt von irreduziblen Elementen, wobei f_i paarweise verschieden sind (auch bis auf Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{C}^*$).

Offensichtlich: $\tilde{f} = f_1 f_2 \cdots f_r \in \sqrt{(f)}$ denn $\tilde{f}^{\max\{p_1, \dots, p_r\}}$ wird von $f = f_1^{p_1} \cdots f_r^{p_r}$ geteilt, also $\tilde{f}^{\max\{p_1, \dots, p_r\}} \in (f)$, also $\tilde{f} \in \sqrt{(f)}$.

Sei $h \in \sqrt{(f)}$. Sei m so, dass $h^m \in (f) \Rightarrow f = f_1^{p_1} \cdots f_r^{p_r}$ teilt $h^m \Rightarrow f_1, \dots, f_r$ teilen h^m

$\Rightarrow f_1, f_2, \dots, f_r$ teilen $h \Rightarrow \tilde{f} = f_1 f_2 \cdots f_r$ teilt h. Somit $\sqrt{(f)} = (\tilde{f}) = (f_1 f_2 \cdots f_r)$

Wissen: $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/(\tilde{f})$ ist Nullteilerfrei. Angenommen $r > 1$, dann gilt:

$\frac{\bar{f}_1}{\overline{f_2 \cdots f_r}} \neq 0$ in $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/(\tilde{f})$. Aber $\bar{f}_1 \cdot \overline{f_2 \cdots f_r} = \bar{\tilde{f}} = 0$ ↯

Also $r = 1$ und $f = f_1^{p_1}$

<u>Korollar</u> (andere Formulierung: $V(f)$ irreduzibel $\Leftrightarrow \mathcal{O}(V(f)) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/(\tilde{f})$ mit $\tilde{f}$ irred.

Achtung: Fehlt noch $f = g^m$ g irreduzibel $\Rightarrow V(f)$ irreduzibel.

<u>Bew.:</u> g irred. $\Rightarrow g$ Primelement $\Rightarrow (g)$ Primideal. (d.h. $h_1 h_2 \in (g) \Rightarrow h_1 \in (g) \vee h_2 \in (g)$

aber das ist klar: $h_1 h_2 \in (g) \Rightarrow g | h_1 h_2 \Rightarrow g | h_1 \vee g | h_2 \Rightarrow h_1 \in (g) \vee h_2 \in (g)$

$\Rightarrow (g)$ Primideal.)

Da (g) Primideal ist folgt: $\sqrt{(g)} = (g)$. Also $\mathcal{O}(V(g)) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/(g)$

und diesen Ring hat keine Nullteiler denn: $\bar{h}_1 \bar{h}_2 = 0$ in $\mathcal{O}(v(f)) \Leftrightarrow h_1 h_2 \in (g)$

$\Rightarrow g \mid h_1$ oder $g \mid h_2 \Rightarrow h_1 = 0 \vee h_2 = 0$

Bew.: Prim $\Leftrightarrow$ irreduzibel in $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$

1) Prim $\Rightarrow$ irreduzibel. Allgemein: Sei R Integritätsbereich ($\Leftrightarrow$ nullteilerfrei)

Sei $p \in R$ ein Primelement, also $p \mid fg \Rightarrow p \mid f \vee p \mid g$ ZZ: p irreduzibel

Sei $p = f \cdot g$ mit f, g keine Einheiten. Da p Primelement folgt aus $p = f \cdot g$ auch

$p \mid f \cdot g$, also p teilt f oder p teilt g. OE $p \mid f$, also: $f = c \cdot p \Rightarrow p = f \cdot g = p c \cdot g$

$\Rightarrow cg = 1 \Rightarrow g$ Einheit $\lightning$

2) irreduzibel $\Rightarrow$ prim

Wird gezeigt per Induktion $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{C}[x_1] \subseteq \mathbb{C}[x_1, x_2] \subseteq \dots$

Beh. ist wahr für $\mathbb{C}, \mathbb{C}[x_1]$. Sei $R = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_i]$

Ann.: R ist faktoriell. ZZ $R[x_{i+1}] = R[x]$ ist auch faktoriell

K = Quotientenkörper von R. $K = \{ \frac{f}{g} \mid f, g \in R, g \neq 0 \} / \frac{f}{g} \sim \frac{f'}{g'}$ falls $fg' = f'g$

- $f \in R[x]$ nennt man primitiv falls die Koeffizienten des Polynoms keine gemeinsamen echten Teiler haben.

Bsp. $R = \mathbb{Z}$: $2 + 8x^2$ nicht primitiv! $3 + 5x + 8x^2$ primitiv!

Anders gesagt: $\boxed{f = cf' \text{ mit } c \in R \Rightarrow c \in R^*}$

- Jedes Polynom $f \in R[x]$ kann man schreiben als $f = r f_0$ mit $r \in R$, f_0 primitiv.

Sei $f = \sum_{i=0}^{m} r_i x^i$, $r_i = c_i \, p_1^{a_{1,i}} p_2^{a_{2,i}} \cdots p_t^{a_{t,i}}$, $c_i \in R^*$ $a_{j,i} \geq 0$

$r = \prod_{j=1}^{t} p_j^{\min\{a_{j,i} \mid i = 0, \dots, m\}}$, $f_0 = \frac{1}{r} f = \sum_{i=0}^{n} \frac{r_i}{r} x^i$. Dann gilt $f = r f_0$ mit f_0 primitiv.

- f_0, g_0 primitiv $\Rightarrow f_0 g_0$ primitiv (Lemma von Gauß)

Bew.: Sei $r \in R$ irred. und so, dass r alle Koeffizienten von $f_0 \cdot g_0$ teilt.

Beachte: $R/(r)$ ist nullteilerfrei

Übung: Auch $R/(r)[x]$ ist nullteilerfrei.

Betrachte die Abb.
$$R[x] \to R/(r)[x]$$
$$\sum_{i=0}^{m} d_i x^i \mapsto \sum_{i=0}^{m} \bar{d}_i x^i$$

Sehen: Das Bild eines Polynoms in $R/(r)[x]$ ist Null $\Leftrightarrow$ r teilt alle Koeffizienten des Polynoms. Insbesondere $\bar{f}_0 \neq 0$, $\bar{g}_0 \neq 0$ aber $\bar{f}_0 \cdot \bar{g}_0 = 0$ $\lightning$ da $R/(r)[x]$ nullteilerfrei.

- Jedes Polynom $f \in K[x]$ ist von der Form: $f = c \cdot f_0$ mit $f_0 \in R[x]$ primitiv, $c \in K$

und diese Darstellung ist eindeutig bis auf Multiplikation mit Einheiten in R.

<u>Bew.:</u> r = gemeinsamer Hauptnenner aller Koeffizienten von $f \Rightarrow rf \in R[x]$

$\Rightarrow \exists r' \in R$ mit $rf = r' f_0$ mit f_0 primitiv in $R[x] \Rightarrow f = \frac{r'}{r} f_0$

Angenommen: $f = a f_0 = b g_0$ mit f_0, g_0 in $R[x]$ primitiv und $a, b \in K$.

Um die Sache zu vereinfachen multipliziere mit dem gemeinsamen Hauptnenner von a und b

und somit: OE $a, b \in R$. Beachte: Damit wird f zwar verändert, aber f_0, g_0 nicht

und es reicht zu zeigen: $f_0 = g_0$ bis auf Multiplikation mit Elementen aus $R^\times$.

Sei $f_0 = \sum_{i=0}^m a_i x^i$, $g_0 = \sum_{j=0}^m b_j x^j$. f_0 ist primitiv $\Rightarrow ggT(a_0, \dots, a_m)$ = Einheit

$\Rightarrow ggT(aa_0, aa_1, \dots, aa_m) = a$ (bis auf Einheit). g_0 primitiv $\Rightarrow ggT(b_0, \dots, b_m)$ = Einheit

$\Rightarrow ggT(bb_0, \dots, bb_m) = b$ (bis auf Einheit).

Aber: $ggT(bb_0, \dots, bb_m) = ggT(aa_0, \dots, aa_m) = ggT$ Koeffizienten von f. $\Rightarrow$: a und b

unterscheiden sich nur durch Einheit $\Rightarrow f_0, g_0$ unterscheiden sich nur durch Einheit.

3) $\forall_{g, f \in R[x]}$ mit f primitiv $(g = fq$ in $K[x] \Rightarrow q \in R[x])$

D.h. falls ein primitives Polynom ein ganzes in $K[x]$ teilt, dann schon in $R[x]$.

<u>Bew.:</u> $q = c q_0$ mit $c \in K$ und $q_0 \in R[x]$. primitiv $\Rightarrow g = f c q_0 = c \underbrace{f q_0}_{\text{primitiv nach (1)}}$

$\Rightarrow c \in R \Rightarrow q \in R[x]$ □

4) $\forall_{f, g \in K[x]}, f = c_1 f_0, g = c_2 g_0$ $(f | g$ in $K[x] \Rightarrow f_0 | g_0$ in $R[x])$

<u>Bew.:</u> $f | g$ in $K[x] \Rightarrow f_0 | g_0$ in $K[x] \overset{(3)}{\Rightarrow} f_0 | g_0$ in $R[x]$

- $f \in R[x]$ irreduzibel, dann ist $f \in R$ prim oder $f \in R[x]$ primitiv und irreduzibel in $K[x]$

<u>Bew.:</u> $f = c f_0$, $c \in R$, f_0 primitiv. D.h. da f irreduzibel $c \in R^\times$ oder $f_0 \in R^\times$.

Falls $f \in R^\times \Rightarrow c$ prim da R faktoriell.

Falls $c \in R^\times \Rightarrow f_0$ primitiv und irreduzibel in $R[x] \overset{(4)}{\Rightarrow} f_0$ irreduzibel in $K[x]$

$\Rightarrow f$ irreduzibel in $K[x]$

<u>Schluß:</u> Sei $f \in R[x]$ irreduzibel.

1. Fall $f \in R$ prim, d.h. $f | gh$ in $R[x]$ $\quad g = r_1 g_0 \quad h = r_2 h_0$

$\Rightarrow gh = r_1 r_2 \underbrace{g_0 h_0}_{\text{primitiv}}$. D.h. $\exists$ Koeffizient a_j von $g_0 h_0$ der nicht von f geteilt wird.

Aber $f | gh \Rightarrow f | r_1 r_2 a_j \Rightarrow f | r_1$ oder $f | r_2 \Rightarrow f | g$ oder $f | h$

2. Fall $f \in R[x]$ primitiv und irreduzibel in $K[x]$.

$K[x]$ faktoriell $\Rightarrow f$ prim in $K[x]$. D.h. ang. $f | gh$ in $K[x]$ $(g, h \in R[x])$

$\Rightarrow f | g$ oder $f | h$ in $K[x]$ $\overset{(3)}{\Rightarrow}$ $f | g$ oder $f | h$ in $R[x] \Rightarrow f$ prim in $R[x]$ (Satz 4)

Bem.: $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ faktoriell, Betonung ist auf eindeutig, „eindeutige Zerlegung in irreduzible Elemente"

$\Leftrightarrow \exists$ Zerlegung mittels Primelemente

Bsp.: (für nicht faktorielle Ringe)

(i) $R[X, Y, Z, W]/XY - ZW$ $\qquad XY \equiv ZW$ unterschiedl. Zerlegung in irred. Elemente

Beh.: X, Y, Z, W irred.

(Für X) Ang. $X = f \cdot g$. Da $\deg(X) = 1$, d.h. $f = r$ $\deg = 0$, $g = aX + bY + cZ + dW$ $\deg = 1$ ($f, g \neq 0$)

$\Rightarrow X = raX + rbY + rcZ + rdW$, d.h. $0 = (ra - 1)X + rbY + rcZ + rdW$ in

$R[X, Y, Z, W]/(XY - ZW)$. Aber $(ra - 1)X + rbY + rcZ + rdW \notin (XY - ZW)$, da alle

Elemente des Ideals mindestens Totalgrad 2 haben. D.h. $(ra - 1)X + rbY + rcZ + rdW = 0$

in $R[X, Y, Z, W] \Rightarrow ra - 1 = 0$ in R $\Leftrightarrow ra = 1 \Rightarrow r \in R^\times$ $\lightning$

(ii) $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \subseteq \mathbb{C} = \{a + i\sqrt{5}b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

$6 = 2 \cdot 3 = (1 + i\sqrt{5})(1 - i\sqrt{5})$. Aber $2, 3, 1 + i\sqrt{5}, 1 - i\sqrt{5}$ sind irreduzibel

und nicht assoziiert (Einheiten). $N : \mathbb{Z}[i\sqrt{5}] \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$, $a + i\sqrt{5}b \longmapsto a^2 + 5b^2$

$\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]^\times = \{\pm 1\}$, denn $N(z) N(z') = N(zz')$ $\forall z z'$.

Daraus folgt auch, dass diese Elemente irreduzibel sind. Schreibe dazu alle Elemente

aus $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ mit kleiner Norm hin.

Bsp. (für faktorielle Ringe)

(i) Jeder Körper ist faktoriell

(ii) K Körper, dann ist $K[x]$ faktoriell.

$K[x]$ ist euklidischer Ring $\Rightarrow$ Hauptidealring $\Rightarrow$ faktoriell.

Euklidisch: $f, g \in K[x]$ $g \neq 0$. Dann ex. $q, r \in K[x]$: $f = gq + r$ und $\deg(r) < \deg(g)$

oder $r = 0$.

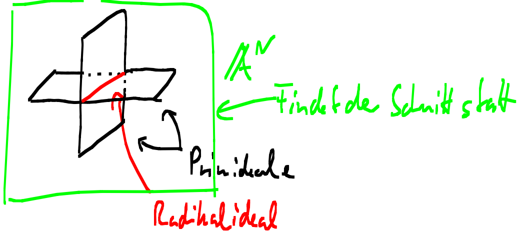
Euklidisch $\Rightarrow$ Hauptidealring: $I \subseteq K[x]$ und $(f) \subseteq I$ mit $\deg(f)$ minimal.

Ang. $(f) \subsetneq I$ und wähle $g \in I \setminus (f)$. Dann ex. $q, r \in K[x]$ mit $g = qf + r$

$\deg(r) < \deg(f)$ oder $r = 0$. Falls $r = 0 \Rightarrow (f) = I$ $\lightning$ Falls $r \neq 0 \Rightarrow \deg(r) < \deg(f)$

$\lightning$ zur Minimalität von f.

Satz 5: Übersetzung: Zerlegung in irreduzible Komponenten $\leftrightarrow$ Radikalideal = Schnitt von Primidealen



Sei R eine endlich erzeugte reduzierte Algebra über $\mathbb{C}$. Dann ist jedes Radikalideal der Schnitt von endlich vielen Primidealen $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_n$

Wenn die Zerlegung nicht verkürzbar ist, dann sind die $\mathfrak{p}_i$ eindeutig. Es sind genau die minimalen Primideale, die $\mathfrak{a}$ enthalten.

<u>Bew.:</u> $R = \mathcal{O}(X)$, $Z = Z_1 \cup \dots \cup Z_r \subseteq X$, $Z = \mathcal{V}(\mathfrak{a})$, $Z_i = \mathcal{V}(\mathfrak{p}_i = \mathcal{J}(Z_i))$ Primideal

$\mathcal{J}(Z) = \bigcap \mathcal{J}(Z_i) = \bigcap \mathfrak{p}_i$ □

<u>Satz 6:</u> X irreduzibel, U offen. Dann $\bar{U} = X$ oder $U = \emptyset$. Sind $U, U' \subseteq X$ offen und $\neq \emptyset$ $\Rightarrow U \cap U' \neq \emptyset$ (Übung)

<u>Satz 7:</u> X bel. affine Varietät (noeth. topol. Raum) $U, U' \subseteq X$ offen und dicht $\Rightarrow U \cap U' \neq \emptyset$ (Übung)

5. Morphismen

Eine polynomiale Abb. $\varphi: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ ist eine Abb. der Form: $\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \\ \varphi_m(x) \end{pmatrix}$ mit $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$

<u>Bsp.:</u> $\varphi: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_1 x_2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$

Seien X, Y affine Varietäten, d.h. $X = \mathcal{V}(I) \subseteq \mathbb{C}^n$, $Y = \mathcal{V}(J) \subseteq \mathbb{C}^m$

(<u>Def 1:</u> $\varphi: X \to Y$ heißt ein Morphismus oder reguläre Abb., falls $\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{C}^m \end{array}$ ψ polynomial mit $\psi|_X = \varphi$)

<u>Def. 1:</u> Eine Abb. $\varphi: X \to Y$ zwischen affinen Varietäten heißt regulär oder Morphismus, falls $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ für $f \in \mathcal{O}(Y)$ d.h. $\varphi^*(f): X \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \varphi(x) \to f(\varphi(x))$ für alle $f \in \mathcal{O}(Y)$ $\varphi^*(f)$ ein Element in $\mathcal{O}(X)$ ist.

X, Y Mengen. $\mathrm{Abb}(X, \mathbb{C})$ ist eine Algebra. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

$\varphi: X \to Y$. $\varphi^*: \mathrm{Abb}(Y, \mathbb{C}) \to \mathrm{Abb}(X, \mathbb{C})$, $f \mapsto \varphi^*(f) := f \circ \varphi$

φ^* ist ein Algebrahomomorphismus: $\varphi^*(f+g)(x) = (f+g)(\varphi(x)) = f(\varphi(x)) + g(\varphi(x)) = \varphi^*(f) + \varphi^*(g)$

$\varphi^*(f \cdot g)(x) = f(\varphi(x)) \cdot g(\varphi(x)) = \varphi^*(f)(x) \cdot \varphi^*(g)(x) = (\varphi^*(f)\,\varphi^*(g))(x) \Rightarrow \varphi^*(f \cdot g) = \varphi^*(f) \cdot \varphi^*(g)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Abb}(Y, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\varphi^*} & \mathrm{Abb}(X, \mathbb{C}) \\ \cup & & \cup \\ \mathcal{O}(Y) & \xrightarrow{\varphi^*} & \mathcal{O}(X) \end{array}$$

$\varphi: X \to Y$

φ Morphismus, wenn

Lemma 1: X affine Varietät und sei $\varphi : X \to \mathbb{C}^m$, $\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_m(x) \end{pmatrix}$.

Dann ist φ ein Morphismus $\Leftrightarrow$ $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \mathcal{O}(X)$

Bew.: $\mathcal{O}(\mathbb{C}^m) = \mathbb{C}[y_1, \dots, y_m]$. Angenommen φ ist regulär. $\varphi^*(y_1)(x) = y_1(\varphi(x)) = y_1 \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_m(x) \end{pmatrix} = \varphi_1(x)$

Allgemein $\varphi^*(y_i) = \varphi_i$. Da φ regulär folgt $\varphi_i = \varphi^*(y_i)$ ist ein Element in $\mathcal{O}(X)$.

Angenommen $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \mathcal{O}(X)$. Zz $\varphi^*(f) \in \mathcal{O}(X)$ $\forall f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^m)$. Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^m) = \mathbb{C}[y_1, \dots, y_m]$

Also: $f = f(y_1, \dots, y_m)$. $\varphi^*(f(y_1, \dots, y_m)) = f(\varphi^*(y_1), \dots, \varphi^*(y_m)) = f(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$. Da die $\varphi_i \in \mathcal{O}(X)$

folgt $f(\varphi_1, \dots, \varphi_m) \in \mathcal{O}(X)$, was zu beweisen war.

Übung: $\varphi : X \to Y$ Morphismus. Sei $X' \subset X$ abgeschlossen, $Y' \subset Y$ abg. und $\varphi(X') \subseteq Y'$.

Dann ist $\varphi|_{X'} : X' \to Y'$ auch ein Morphismus.

Lemma 2: Seien $X \subseteq \mathbb{C}^n$, $Y \subseteq \mathbb{C}^m$ affine Varietäten. Dann ist $\varphi : X \to Y$ Morphismus $\Leftrightarrow$

$$\exists : \begin{array}{ccccl} \tilde{\varphi} : & \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{C}^m & \text{polynomial} \\ & \cup & & \cup & \\ \varphi : & X & \to & Y & \text{mit } \tilde{\varphi}|_X = \varphi \end{array}$$

Bew.: "$\Leftarrow$" Angenommen: $\tilde{\varphi} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ polynomial. Lemma 1 $\Rightarrow \tilde{\varphi}$ Morphismus, Übung $\Rightarrow \varphi$ Morphismus.

"$\Rightarrow$" Angenommen: $\varphi : X \to Y$ Morphismus

$$\begin{array}{cccc} & \cap & & \cap \\ ?\ \tilde{\varphi} : & \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{C}^m \text{ polynomial} \end{array}$$

Zunächst: $\mathcal{O}(\mathbb{C}^m) = \mathbb{C}[y_1, \dots, y_m]$, $\mathcal{O}(Y) = \mathbb{C}[y_1, \dots, y_m]/I(Y)$

Also die $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m \in \mathcal{O}(Y)$ erzeugen $\mathcal{O}(Y)$.

$\varphi^* : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$. Es folgt: $\bar{f}_1 = \varphi^*(\bar{y}_1), \dots, \bar{f}_m = \varphi^*(\bar{y}_m)$ sind Elemente in $\mathcal{O}(X)$.

$\mathcal{O}(X) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I(X)$ Seien $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ mit $\bar{f}_1 = f_1 + I(X)$.

Sei $\tilde{\varphi} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, $v \mapsto \begin{pmatrix} f_1(v) \\ \vdots \\ f_m(v) \end{pmatrix}$ $\quad$ $\tilde{\varphi}$ ist polynomiale Abb.

Frage: Ist $\tilde{\varphi}|_X = \varphi$? $\quad \begin{array}{cccc} \tilde{\varphi} : & \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{C}^m \\ & \cup & & \cup \\ & X & & Y \end{array}$

Sei $a \in X$ dann gilt: $\tilde{\varphi}(a) = \begin{pmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_m(a) \end{pmatrix} \underset{\text{da } a \in X}{=} \begin{pmatrix} \bar{f}_1(a) \\ \vdots \\ \bar{f}_m(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^*(\bar{y}_1)(a) \\ \vdots \\ \varphi^*(\bar{y}_m)(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1(\varphi(a)) \\ \vdots \\ \bar{y}_m(\varphi(a)) \end{pmatrix}$

$\underset{\text{da } \varphi(a) \text{ in } Y}{=} \begin{pmatrix} y_1(\varphi(a)) \\ \vdots \\ y_m(\varphi(a)) \end{pmatrix} = \varphi(a)$. Also $\tilde{\varphi}|_X = \varphi \Rightarrow$ Beh. $\square$

Def. 2: $\varphi : X \to Y$ Morphismus φ heißt Iso-, Epi-, Mono-, Automorphismus falls φ bijektiv und φ^{-1} Morph.,

φ surjektiv, φ injektiv, φ ein Isomorph. & $X = Y$.

Bsp.: $\varphi: \mathbb{C} \to Y \subseteq \mathbb{C}^2$, $Y = V(y_2^2 - y_1^3)$  Neilsche Parabel

$t \mapsto \binom{t^2}{t^3}$

φ injektiv: $\varphi(t) = \varphi(t') \Rightarrow \left.\begin{matrix} t^2 = t'^2 \\ t^3 = t'^3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow t = t'$

φ surjektiv: $\binom{y_1}{y_2} \in Y$. Angenommen: $y_1 = 0 \Rightarrow y_2 = 0$. Dann $\varphi(0) = \binom{y_1}{y_2} = \binom{0}{0}$.

Angenommen: $y_1 \neq 0$. Wähle $t = \pm\sqrt{y_1}$. Beachte $y_2^2 - y_1^3 = 0$, also

$y_2 = \pm\sqrt{y_1^3} = \pm(\sqrt{y_1})^3 = \pm t^3$. Kann $t = \sqrt{y_1}$ oder $t = -\sqrt{y_1}$ wählen, sodaß $\varphi(t) = \binom{y_1}{y_2}$

Achtung: $\varphi^{-1}: Y \to \mathbb{C}$ ist <u>kein</u> Morphismus!

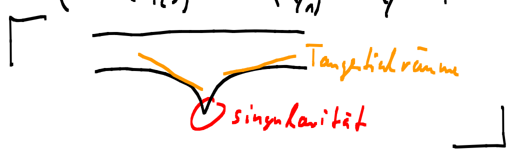
$\varphi^{-1}: Y \to \mathbb{C}$ Zz $(\varphi^{-1})^*: \underset{\mathbb{C}}{\overset{\shortparallel}{\mathcal{O}(X)}} \not\to \mathcal{O}(Y)$

$\binom{y_1}{y_2} \mapsto \frac{y_2}{y_1}$ $y_1 \neq 0$

$\binom{0}{0} \mapsto 0$

$\mathcal{O}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}[x]$ $\left(((\varphi^{-1})^*(x)\right)\binom{y_1}{y_2} = x\left(\varphi^{-1}\binom{y_1}{y_2}\right) = x\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{y_2}{y_1} \notin \mathcal{O}(Y)$

da nicht in $\binom{0}{0}$ definiert.



Satz 1: Die Abb. $\varphi \to \varphi^*$ von $\mathrm{Mor}(X, Y)$ nach $\mathrm{Alg}(\mathcal{O}(Y), \mathcal{O}(X))$ ist bijektiv. (Kontravariante Funktor)

Objekte: Affine Varietäten
Abb.: Morphismen

$$X \downarrow \mathcal{O}(X)$$

Objekte: endlich erzeugte $\mathbb{C}$-Algebren, die reduziert sind
Abb.: Algebrahomomorphismen

Bew.: Injektivität: Erinnerung: $\mathcal{O}(X)$ trennt Punkte in X, d.h. $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \exists f \in \mathcal{O}(X): f(x_1) \neq f(x_2)$

Bew.: $X \subseteq \mathbb{C}^n$, $a, b \in X$, $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $a \neq b \Rightarrow \exists j: a_j \neq b_j$, $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]$

$\Rightarrow y_j(a) \neq y_j(b) \Rightarrow \bar{y}_j$ in $\mathcal{O}(X) = \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]/I(Y)$ trennt a und b.

Seien $\varphi_1, \varphi_2: X \to Y$ Morphismen mit $\varphi_1^* = \varphi_2^*$. Dann folgt $\forall f \in \mathcal{O}(Y)$.

$f(\varphi_1(x)) = \varphi_1^*(f)(x) = \varphi_2^*(f)(x) = f(\varphi_2(x))$. Also: $\forall x \in X$ und $\forall f \in \mathcal{O}(Y)$ $f(\varphi_1(x)) = f(\varphi_2(x))$

$\Rightarrow \varphi_1(x) = \varphi_2(x) \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$

Gegeben $X \subseteq \mathbb{C}^n$, $Y \subseteq \mathbb{C}^m$, $\varphi: \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ Algebrahom. $\mathcal{O}(X) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I(X)$,

$\mathcal{O}(Y) = \mathbb{C}[y_1, \dots, y_m]/I(Y)$. $\bar{y}_i := y_i|_Y$. $\bar{f}_i := \varphi(\bar{y}_i) \in \mathcal{O}(X)$. Sei $f_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ sodass

$\bar{f}_i \equiv f_i + I(X)$. $\psi: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, $v \mapsto \begin{pmatrix} f_1(v) \\ \vdots \\ f_m(v) \end{pmatrix}$. $\bar{\psi}: X \to \mathbb{C}^m$, $x \mapsto \begin{pmatrix} \bar{f}_1(x) \\ \vdots \\ \bar{f}_m(x) \end{pmatrix}$ ψ polynomial $\Rightarrow \bar{\psi}$ Morphismus.

Frage: $\bar{\psi}(x) \in Y$ für $x \in X$? Sei $h(y_1, \dots, y_m) \in I(Y) \subset \mathbb{C}[y_1, \dots, y_m]$.

$$h(\bar{\psi}(x)) = h(\bar{f}_1(x), \dots, \bar{f}_m(x)) = h(\bar{\psi}(\bar{y}_1), \dots, \bar{\psi}(\bar{y}_m))(x) = \psi^*\big(\underbrace{h(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)}_{=0}\big)(x) = 0$$

Somit folgt: $\bar{\psi}(x) \in Y$ $\forall x \in X$ $\Rightarrow \bar{\psi}|_X: X \to Y$ ist ein Morphismus

Beachte: $\bar{\psi}^*(\bar{y}_i) = f_i = \varphi(\bar{y}_i)$. Somit $\bar{\psi}^* = \varphi$ auf den Erzeugern $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m$ von
$\mathcal{O}(Y) = \mathbb{C}[y_1, \dots, y_m]/I(Y) \Rightarrow \bar{\psi}^* = \varphi$.

Bilder, Urbilder & Fasern

Satz 2: Sei $\varphi : X \to Y$ Morphismus von affinen Varietäten.

(1) Sei $B \subseteq Y$ abgeschlossen, $B = \mathcal{V}_Y(I)$. Dann ist $\varphi^{-1}(B) = \mathcal{V}_X(\varphi^*(I))$. Insbesondere ist $\varphi^{-1}(B)$ abgeschlossen und φ ist stetig in der Zariski-Topologie.

(2) Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen, $A = \mathcal{V}_X(J)$. Dann ist $\overline{\varphi(A)} = \mathcal{V}_Y(\varphi^{*-1}(J))$.

Bew.: $x \in \varphi^{-1}(B) \Leftrightarrow \varphi(x) \in B \Leftrightarrow \forall f \in I : f(\varphi(x)) = 0 \Leftrightarrow \forall f \in I : \varphi^*(f(x)) \; (= f \circ \varphi(x) = 0) = 0$
$\Leftrightarrow \forall h \in \varphi^*(I) : h(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathcal{V}_X(\varphi^*(I))$

Sei $f \in \mathcal{O}(Y)$, $A = \mathcal{V}(J)$. $f|_{\overline{\varphi(A)}} \equiv 0 \Leftrightarrow f|_{\varphi(A)} \equiv 0 \Leftrightarrow \varphi^*(f)|_A \equiv 0 \Leftrightarrow \varphi^*(f) \in \sqrt{J}$
$\Leftrightarrow \exists n : \varphi^*(f^n) \in J \Leftrightarrow \exists n \; \varphi^*(f)^n \in J$. Das bedeutet aber: $\mathcal{V}(\varphi^{*-1}(J)) = \overline{\varphi(A)}$

Übung: X irreduzibel $\Rightarrow \varphi(X)$ irreduzibel. $\varphi : X \to Y$, $U \subset Y$ spezielle offene Teilmenge ($U = Y_f$) $\Rightarrow \varphi^{-1}(U) \subset X$ spezielle offene Teilmenge.

Bem.: Man kann zeigen: $\varphi(A)$ ist "konstruierbar", d.h. $\varphi(A)$ = Schnitt von $\overline{\varphi(A)} \cap$ offenen Teilmengen in Y

Sei $\varphi : X \to Y$ Morphismus zwischen affinen Varietäten, $y \in Y$. $\varphi^{-1}(y) = \{x \in X \mid \varphi(x) = y\}$ nennt man die Faser von φ über den Punkt y.

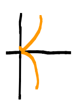
Problem: $\varphi^* : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$. $\varphi^{*-1}(\text{Ideal}) = \text{Ideal}$. Aber i.A. $\varphi^*(\text{Ideal}) \neq \text{Ideal}$

$I \subseteq \mathcal{O}(Y)$ Ideal. $\mathcal{O}(X) \cdot \varphi^*(I) :=$ das von $\varphi^*(I)$ erzeugte Ideal.

Bem.: I Radikalideal i.A.: $\mathcal{O}(X)\varphi^*(I)$ kein Radikalideal.

Man sagt die Faser $\varphi^{-1}(y)$ ist reduziert, falls $\mathcal{O}(\varphi^{-1}(y)) = \mathcal{O}(X)/\mathcal{O}(X) \cdot \varphi^*(\mathfrak{m}_y)$, $\mathfrak{m}_y = I(y)$

Im Allg. nur $\mathcal{O}(\varphi^{-1}(y)) = \mathcal{O}(X)/\sqrt{\mathcal{O}(X) \cdot \varphi^*(\mathfrak{m}_y)}$

Bsp.: $\varphi : \mathbb{C} \to Y = \mathcal{V}(y_1^3 - y_2^2) \subseteq \mathbb{C}^2$, $x \mapsto \binom{x^2}{x^3}$ .

$y = \binom{0}{0}$, $\mathcal{O}(Y) = \mathbb{C}[y_1, y_2]/(y_1^3 - y_2^2)$ $\qquad \mathfrak{m}_y = (y_1, y_2) \subseteq \mathcal{O}(Y)$

$\varphi^* : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X) = \mathbb{C}[x]$, $\bar{y}_1 \mapsto x^2$, $\bar{y}_2 \mapsto x^3$

Da $\mathfrak{m}_y$ erzeugt wird von $\bar{y}_1, \bar{y}_2$, wird $\mathcal{O}(X)\varphi^*(\mathfrak{m}_y)$ erzeugt von $\varphi^*(\bar{y}_1), \varphi^*(\bar{y}_2)$ also:
$\mathcal{O}(X)\,\varphi^*(\mathfrak{m}_y) = (x^2, x^3) = (x^2)$

Insbesondere: $\varphi^{-1}(\binom{0}{0}) = 0$, aber die Faser ist nicht reduziert.

Übung: Alle anderen Fasern sind reduziert. Der Grund: $\varphi : \mathbb{C}^* \to Y - \{0\}$ ist ein Isomorphismus

Satz 3: 1) Die Abb. $\varphi: X \to Y$ ist eine Einbettung (d.h. $\varphi(X)$ ist abg. und ein Isomorphismus auf das Bild)

$\Leftrightarrow$ φ^* surjektiv.

2) φ ist dominant (d.h. $\overline{\varphi(X)} = Y$) $\Leftrightarrow$ φ^* ist injektiv

Bew.: Zu 2) Satz 2: $\overline{\varphi(X)} = \nu_Y(\varphi^{*^{-1}}((0)))$. Offensichtlich $Y = \nu_Y((0))$. $\overline{\varphi(X)} = Y \Leftrightarrow \nu_Y((0)) = \nu_Y(\varphi^{*^{-1}}((0)))$

$\Leftrightarrow (0) = \sqrt{\varphi^{*^{-1}}((0))} \Leftrightarrow \varphi^{*^{-1}}(0) = 0 \Leftrightarrow \varphi^*$ injektiv.

Zu 1) Sei φ^* surjektiv, $\mathfrak{a} = \ker \varphi^*$, $Z = \nu_Y(\mathfrak{a}) \subseteq Y$. Sei $\mathcal{O}(Z) = \mathcal{O}(Y)/\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathcal{O}(Y)/\mathfrak{a} \cong \mathcal{O}(X)$

(denn: $\varphi^*: \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ surjektiv, also $\mathcal{O}(X) \cong \mathcal{O}(Y)/\ker\varphi^*$!)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\wr"'] & Y \\ & Z \arrow[u, hook] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{O}(X) \arrow[d, "\wr"'] & \mathcal{O}(Y) \arrow[l, "\varphi^*"'] \arrow[dl] \\ \mathcal{O}(Z) = \mathcal{O}(Y)/\ker\varphi^* & \end{tikzcd}$$

$\ulcorner$ $\varphi: \mathbb{C} \to Y = \nu(y_2^2 - y_1^3) \subseteq \mathbb{C}^2$, $x \mapsto \binom{x^2}{x^3}$ $\qquad \varphi^* = \mathbb{C}[y_1, y_2]/(y_2^2 - y_1^3) \to \mathbb{C}[x]$

$\bar{y}_1 \mapsto x^2$

$\bar{y}_2 \mapsto x^3$ $\qquad \Rightarrow \varphi^*(\mathcal{O}(Y)) = \mathbb{C}[x^2, x^3] \subsetneq \mathbb{C}[x]$ $\lrcorner$

Sei $\varphi(X)$ abg. und φ Isomorphismus auf das Bild. Sei $\mathfrak{z} = I(\varphi(X)) \subseteq \mathcal{O}(Y)$

$\Rightarrow \mathcal{O}(X) \cong \mathcal{O}(\varphi(X)) \cong \mathcal{O}(Y)/\mathfrak{z}$ und $\varphi^*: \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(Y)/\mathfrak{z} \cong \mathcal{O}(X) \Rightarrow \varphi^*$ surjektiv.

6. Dimension

Was hätte man gern: $\dim \mathbb{C}^n = n$

$U \subset X$ offen $\Rightarrow \dim U = \dim X$

X irreduzibel, $f \in \mathcal{O}(X) \Rightarrow \nu(f)$ hat Dimension $< \dim X$

Wie soll man die Dimension messen? $\boxed{\text{Im Folgenden: } X \text{ irreduzibel !}}$

$\mathcal{O}(X)$ keine Nullteiler. $\mathbb{C}(X) = \mathrm{Quot}\,\mathcal{O}(X) = \{\frac{f}{g} \mid f, g \in \mathcal{O}(X), g \neq 0\}/\frac{f}{g} \sim \frac{f'}{g'}$, falls $fg' = f'g$

Körper der rationalen Funktionen

Bsp.: $X = \mathbb{C}$, $\mathbb{C}(X) = \{\frac{f(x)}{g(x)} \mid f, g \in \mathbb{C}[x], g \neq 0\}/\frac{f}{g} \sim \frac{f'}{g'} \Leftrightarrow fg' = f'g$

$K \subset L$ Körper, $\alpha \in L$, $\varphi: K[x] \to L$, $p(x) \mapsto p(\alpha)$

1) φ nicht injektiv $\Rightarrow \operatorname{Im}\varphi \cong K[x]/\ker\varphi \hookrightarrow L$

Da $\ker\varphi = (f)$, f irreduzibel, $\ker\varphi$ maximal

$\operatorname{Im}\varphi$ ist ein Unterkörper. Man nennt α algebraisch$/K$

2) φ injektiv $\Rightarrow \alpha$ heißt transzendent über K. $\operatorname{Im}\varphi = K[\alpha] \subsetneq K(\alpha) =$ kleinster Körper in L der α enthält.

$\alpha_1, \dots, \alpha_s \in L$ algebraisch unabhängig über K, falls $K[x_1, \dots, x_s] \to L$, $p(x_1, \dots, x_s) \mapsto p(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ injektiv

Bekommen: $K(x_1, \dots, x_s) \xhookrightarrow{\text{einsetzen}} L$

Man nennt $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ Transzendenzbasis von L über K falls alle $l \in L$ algebraisch sind über $K(\alpha_1,\dots,\alpha_s)$ mit $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ alg. unabhängig.

<u>Bem.</u>: $\exists$ immer Transzendenzbasis.

<u>Satz 1</u>: $(\beta_1,\dots,\beta_n)$ Transzendenzbasis von L über K, seien $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ alg. unabhängig über K. Dann gilt $m \leq n$ und (nach Umnummerierung) $(\alpha_1,\dots,\alpha_m,\beta_{m+1},\dots,\beta_n)$ ist eine Transzendenzbasis.

<u>Folgerung</u>: Die Anzahl der Elemente einer Transzendenzbasis ist wohldefiniert.

<u>Def.</u>: Sei X eine affine Varietät irreduzibel. $\dim X = \text{transz. deg } \mathbb{C}(X)$ = Anzahl der Elemente einer Transz.basis von $\mathbb{C}(X)$ über $\mathbb{C}$.

$\dim \mathbb{C}^n$? $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$, $\mathbb{C}(X) = \mathbb{C}(x_1,\dots,x_n)$. $\dim \mathbb{C}^n = \text{transz.deg } \mathbb{C}(x_1,\dots,x_n) = n$, da $x_1,\dots,x_n$ Transz.basis.

$\dim X = m$, $f \in \mathcal{O}(X)$, $U = X_f$ = spezielle offene Teilmenge.

$\dim U = ?$: $\mathcal{O}(U) = \mathcal{O}(X_f) = \langle \frac{g}{f^n} \mid g \in \mathcal{O}(X), n \geq 0 \rangle \subseteq \mathbb{C}(X)$.

$$\mathbb{C}(U) = \text{Quot.}\, \mathbb{C}(X_f) = \mathbb{C}(X) \Rightarrow \underline{\dim U = \dim X}$$

<u>Satz 2</u>: $f \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ irreduzibel, $X = V(f) \subseteq \mathbb{C}^n$. Dann gilt $\dim X = n-1$

<u>Bew.</u>: OE komme x_n in f vor. $\Rightarrow \mathcal{O}(X) = \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]/(f) \Rightarrow x_1,\dots,x_{n-1}$ sind alg. unabhängig in $\mathcal{O}(X)$ denn $\forall p(x_1,\dots,x_{n-1}) \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_{n-1}]$ $f \nmid p(x_1,\dots,x_{n-1}) \Rightarrow \dim X \geq n-1$.

Andersherum: x_n ist algebraisch über $\mathbb{C}(x_1,\dots,x_{n-1}) \subset \mathbb{C}(X)$ denn man kann $f = \sum_{i=1}^{r} p_i x_n^i$, $p_i \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_{n-1}] \subset \mathbb{C}(x_1,\dots,x_n)$ und somit $\tilde{f} \in \mathbb{C}(x_1,\dots,x_{n-1})[y]$ indem man x_n ersetzt durch y. Abbildung:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}(x_1,\dots,x_{n-1})[y] &\to \mathbb{C}(X) \\ y &\mapsto \bar{x}_n \\ \tilde{f} &\mapsto f(x_1,\dots,x_n) = 0 \text{ in } \mathbb{C}(X) \end{aligned}$$

<u>Bew.</u> (Satz 1): α_1 ist algebraisch über $K(\beta_1,\dots,\beta_n) \Rightarrow \exists f \in K(\beta_1,\dots,\beta_n)[x]$ mit $f(\alpha_1) = 0$. Durch multiplizieren mit Produkt der Nenner kann man erreichen. OE: $f \in K[\beta_1,\dots,\beta_n][x]$.

In f kommt mind. ein β_j vor. OE β_1 kommt vor. Sei $\tilde{f}$ das Polynom in den Variablen x,y das man erhält indem man β_1 durch y ersetzt. Also: $\tilde{f}(x,y) \in K[\beta_2,\dots,\beta_n][x,y]$ und $\tilde{f}(x,\beta_1) = f(x)$, $\tilde{f}(\alpha_1,\beta_1) = f(\alpha_1) = 0$ und $\underbrace{\tilde{f}(\alpha_1,y)}_{p(y)} \in K[\alpha_1,\beta_2,\dots,\beta_n][y]$ und $p(\beta_1) = \tilde{f}(\alpha_1,\beta_1) = 0$. Also: β_1 ist algebraisch über $K[\alpha_1,\beta_2,\dots,\beta_n]$.

<u>Beachte</u>: β_1 ist algebraisch über $K(\alpha_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$ bedeutet $K(\alpha_1,\beta_1,\dots,\beta_n)$ ist von endlicher

Dimension in $\underbrace{K(\alpha_1,\beta_2,\dots\beta_n)}_{F}$

$\ulcorner$ Denn: $ev: F[y] \to F(\beta_n)$, $p(y) \mapsto p(\beta_n)$, β_n algebraisch $\Rightarrow \ker ev \neq \{0\}$

$F[y]$ Hauptidealring $\Rightarrow \ker ev = (h(y))$. Da $F[y]/(h(y)) \hookrightarrow F(\beta_n)$ folgt

keine Nullteiler $\Rightarrow h(y)$ irreduzibel $\Rightarrow (h(y))$ maximal $\Rightarrow F[y]/(h(y))$ Körper

$\Rightarrow \operatorname{Im} ev$ Körper, enthält β_n $\Rightarrow \operatorname{Im} ev = F(\beta_n)$ und $\dim_F F(\beta_n) = \operatorname{grad} h(y)$

Sei $l \in L$ beliebig $\Rightarrow l$ algebraisch über $K(\beta_1,\dots,\beta_n) \Rightarrow l$ algebraisch über $K(\alpha_1,\beta_1,\dots,\beta_n)$

$\Rightarrow \dim_{K(\alpha_1,\beta_1,\dots,\beta_n)} K(\alpha_1,\beta_1,\dots,\beta_n,l) < \infty$. Da $\dim_F K(\alpha_1,\beta_1,\dots,\beta_n) < \infty$ folgt

$\dim_F K(\alpha_1,\beta_1,\dots\beta_n,l) < \infty \Rightarrow l$ ist algebraisch über F, denn $ev: F[x] \to K(\alpha_1,\beta_1,\dots\beta_n,l)$
$p(x) \mapsto p(l)$

da $\dim F[x] = \infty \Rightarrow \ker ev \neq 0$. $\Rightarrow$ Alle Elemente in L sind algebraisch über

$F = K(\alpha_1,\beta_2,\dots\beta_n)$ $\lrcorner$

Induktion liefert Beh. $\square$

Satz 3: X irreduzibel, $Y \subsetneq X$ abgeschlossen, irreduzibel. Dann ist $\dim Y < \dim X$

Bew.: $h_1,\dots,h_m$ Transzendenzbasis von $\mathbb{C}(Y)$. OE $h_1,\dots,h_m \in \mathcal{O}(Y)$

Angenommen $h_1,\dots,h_m \in \mathcal{O}(Y)$ algebraisch unabhängig, maximal mit dieser Eigenschaft.

dh. $\forall f \in \mathcal{O}(Y)$ $\exists p(x) \in \mathbb{C}[h_1,\dots,h_m][x]$ mit $p(f) = 0$

$\ulcorner$ algebraisch unabhängig: $\forall p(x_1,\dots,x_m) \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_m]: p(h_1,\dots,h_m) \neq 0$: $f \in \mathcal{O}(Y)$ nicht mehr

algebraisch unabhängig bzgl. $h_1,\dots,h_m$ bedeutet: $\exists p(x_1,\dots,x_m,x) \cdot \underbrace{p(h_1,\dots,h_m,f)}_{p(x) := p(h_1,\dots,h_m,x) \in \mathbb{C}[h_1,\dots,h_m][x]} = 0 = p(f)$

Beachte: $h_1,\dots,h_m$ algebraisch unabhängig: $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_m] \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[h_1,\dots,h_m] \subseteq \mathcal{O}(Y)$

$\mathbb{C}(x_1,\dots,x_m) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}(h_1,\dots,h_m) \subseteq \mathbb{C}(Y)$

Gesehen: Alle Elemente in $\mathcal{O}(Y)$ sind algebraisch über $\mathbb{C}(h_1,\dots,h_m) \Rightarrow \mathbb{C}(Y)$ algebraisch über $\mathbb{C}(h_1,\dots,h_m)$ $\lrcorner$

$h_1,\dots,h_m \in \mathcal{O}(Y)$ Transz. von $\mathbb{C}(Y)$. $\pi: \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(Y)$, seien $\tilde{h}_1,\dots,\tilde{h}_m \in \mathcal{O}(X)$ so

dass $\pi(\tilde{h}_1) = h_1$. $\Rightarrow \tilde{h}_1,\dots,\tilde{h}_m$ algebraisch unabh. $\Rightarrow \dim X \geq \dim Y$.

Sei $f \in \mathcal{O}(X)$ so, dass $f|_Y \equiv 0$. Angenommen $\dim X = \dim Y$. $\Rightarrow f$ ist algebraisch über $\mathbb{C}(\tilde{h}_1,\dots\tilde{h}_m)$

$\Rightarrow \exists p_0,p_1,\dots p_k \in \mathbb{C}(\tilde{h}_1,\dots,\tilde{h}_m)$ mit $p_k f^k + p_{k-1} f^{k-1} + \dots + p_0 = 0$. Multiplizieren mit Nennern

OE $p_k,p_{k-1},\dots,p_0 \in \mathbb{C}[\tilde{h}_1,\dots\tilde{h}_m]$. Es folgt: $p_k f^k + \dots + p_0 |_X \equiv 0$

$\Rightarrow (p_k f^k + \dots + p_1 f + p_0)|_Y \equiv 0 \Rightarrow p_0|_Y \equiv 0 \Rightarrow p_0 = 0$ da $\tilde{h}_1|_Y = h_1$ algebr. unabh.

Teile Gleichung durch f $\Rightarrow p_k f^{k-1} + \dots + p_1 \equiv 0$ usw.

Folgerung: $\dim X = \dim Y$ dann kann es ein solches f nicht geben $\Rightarrow X = Y$ ↯

Korollar: Wenn $\mathcal{O}(X)$ n Erzeuger hat $\Rightarrow \dim X \leq n$

Bew.: Seien $f_1, \dots, f_r$ Erzeuger $\Rightarrow \psi : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_r] \to \mathcal{O}(X)$, $p \mapsto p(f_1, \dots, f_r)$

$\Rightarrow \varphi : X \hookrightarrow \mathbb{C}^r$ mit $\varphi^* = \psi \Rightarrow \dim X \leq \dim \mathbb{C}^r = r$

Korollar: $\mathcal{O}(X)$ hat n Erzeuger und $\dim X = n \Leftrightarrow X = \mathbb{C}^n$

Bew.: "$\Leftarrow$" ✓

"$\Rightarrow$" $\varphi: X \hookrightarrow \mathbb{C}^n$. Bild ist abg. Teilmenge. $X \neq \mathbb{C}^n \Rightarrow \exists f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ mit $f|_X = 0$

Sei $Z = V(f)$, X ist irreduzibel, Z_0 irreduzible Komponente von Z, die X enthält.

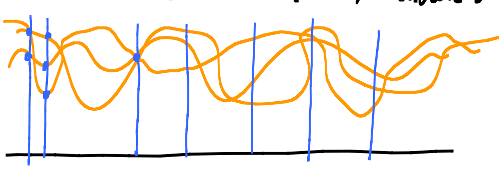
$\Rightarrow \dim X \leq \dim Z_0 = n-1$

Noether Normalisierung

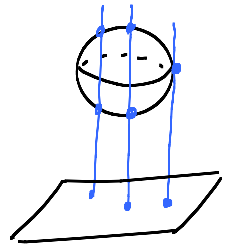
Sei X irreduzibel: $\exists f_1, \dots, f_r$, $r = \dim X$ mit $\mathcal{O}(X)$ ist endliche Modul über $\mathbb{C}[f_1, \dots, f_r]$, $f_1, \dots, f_r$ algebraisch unabhängig.

Konsequenz: $\mathbb{C}[f_1, \dots, f_r] \hookrightarrow \mathcal{O}(X) \Rightarrow \varphi: X \to \mathbb{C}^r$ mit $\varphi^*: \mathbb{C}[x_1, \dots, x_r] \to \mathcal{O}(X)$, $p(x_1, \dots, x_r) \mapsto p(f_1, \dots, f_r)$

$\mathcal{O}(X)$ endliche Modul über $\mathbb{C}[f_1, \dots, f_r]$ bedeutet $\forall z \in \mathbb{C}^r$ $\mathcal{O}(\varphi^{-1}(z))$ ist endlich-dimensionale Algebra. $= \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \dots \oplus \mathbb{C} \Rightarrow \varphi^{-1}(z)$ endliche Anzahl von Punkten.



$\mathbb{C}$



7 Tangentialraum

Analysis: Tangentialvektor "=" Richtungsableitung. $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $\partial_v = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_z$

Z affine Varietät, irreduzibel

(1) $T_z(Z) =$ Punktderivationen in z $= \mathrm{Der}_z(\mathcal{O}(Z)) = \{\partial : \mathcal{O}(Z) \to \mathbb{C} \mid \mathbb{C}\text{-linear}, \partial(f \cdot g) = f(z)\partial(g) + g(z)\partial f\}$

Bsp.: $X = \mathbb{C}^n$, $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $\quad \delta_{v,z} : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \to \mathbb{C}$, $p(x) \mapsto \sum (a_i \frac{\partial}{\partial x_i} p)\Big|_z$

[Frank Warner: Foundations of diff. manifolds]

(2) $T_z Z := (\mathfrak{m}_z / \mathfrak{m}_z^2)^*$ ← Dualraum , $\mathfrak{m}_z = \{f \in \mathcal{O}(Z) \mid f(z) = 0\}$

(1) $\Rightarrow$ (2). Sei $\partial \in \mathrm{Der}_z(\mathcal{O}(Z))$, $f, g \in \mathfrak{m}_z \Rightarrow \partial(f \cdot g) = \underset{\overset{\parallel}{0}}{f(z)} \partial g + \underset{\overset{\parallel}{0}}{g(z)} \partial f = 0 \Rightarrow \partial|_{\mathfrak{m}_z^2} = 0$

$\Rightarrow \partial : \mathfrak{m}_z / \mathfrak{m}_z^2 \to \mathbb{C}$

(2) $\Rightarrow$ (1) $\phi : \mathfrak{m}_z/\mathfrak{m}_z^2 \to \mathbb{C}$ $\quad \delta_\phi : \mathcal{O}(Z) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto \phi(\overline{f - f(z)})$, $\overline{f-f(z)} \in \mathfrak{m}_z/\mathfrak{m}_z^2$

δ_ϕ ist $\mathbb{C}$-linear (da ϕ linear). Leibnis-Regel?

$$\delta_\phi(f.g) := \phi(\overline{fg - f(z)g(z)}) = \phi(\overline{(f-f(z))g(z) + (g-g(z))f(z) + \underbrace{(f-f(z))(g-g(z))}_{\in \mathfrak{m}_z^2}}) =$$

$$= g(z)\,\phi(\overline{f-f(z)}) + f(z)\,\phi(\overline{g-g(z)}) = g(z)\,\delta_\phi(f) + f(z)\,\delta_\phi(g)$$

Bem.: $\mathcal{O}(Z) = \mathbb{C}.1 \oplus \mathfrak{m}_z$, $f_1, \dots, f_r$ Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}_z$.

$\mathfrak{m}_z/\mathfrak{m}_z^2 \ni \overline{f_1}, \dots, \overline{f_r}$ bilden ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}_z/\mathfrak{m}_z^2$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum

$\Rightarrow \dim T_z Z \leq r$

Bsp.: $X = \mathbb{C}^n$, $z = 0$, $\mathfrak{m}_z = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathfrak{m}_z/\mathfrak{m}_z^2 = \mathbb{C}\bar{x}_1 \oplus \mathbb{C}\bar{x}_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}\bar{x}_n$

$\frac{\partial}{\partial x_i} : \bar{x}_j \longrightarrow \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases} \quad \Rightarrow \quad T_0\mathbb{C}^n = \mathbb{C}\frac{\partial}{\partial x_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}\frac{\partial}{\partial x_n}$

(3) $\mathbb{C}[\varepsilon] = \mathbb{C}[t]/(t^2)$ mit $\varepsilon \mathrel{\hat=} \bar{t}$, $\mathbb{C}[\varepsilon] = \mathbb{C}\cdot 1 \oplus \mathbb{C}\varepsilon$ mit $(a+b\varepsilon)(c+d\varepsilon) = ac + (bc+ad)\varepsilon + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{bd\varepsilon^2}}$

Bem.: $\mathbb{C}[t]/(t^2)$ lokaler Ring, d.h. $\exists!$ Maximalideal $(t)/(t^2)$.

$T_z Z = \mathrm{Alghom}(\mathcal{O}(Z), \mathbb{C}[\varepsilon])$ mit $\tau(\mathfrak{m}_z) \subseteq \mathbb{C}\varepsilon$.

Äquivalente Definition, denn: $\delta \in \mathrm{Der}_z(\mathcal{O})$, $\tau : \mathcal{O}(Z) \to \mathbb{C}[\varepsilon]$, $f \mapsto f(z) + \varepsilon\delta(f)$

linear, $\tau(1) = 1$ und $\tau(f.g) = f(z)g(z) + \varepsilon\delta(f.g) = f(z)g(z) + \varepsilon(f(z)\partial g + g(z)\partial f)$

$= (f(z) + \varepsilon\partial f)(g(z) + \varepsilon\partial g)$ ✓

Umkehrung: $\tau : \mathcal{O}(Z) \to \mathbb{C}[\varepsilon]$ Algebrahom. mit $\tau(\mathfrak{m}_z) \subseteq \mathbb{C}\varepsilon$. $\tau(1) = 1$ da τ Algebrahom.

Es folgt $\tau(f) = \tau(f(z) + (\underset{\in \mathfrak{m}_z}{f - f(z)})) = \tau(f(z)) + \tau(f - f(z)) = f(z)\tau(1) + \varepsilon\tau_1(f - f(z)) = f(z) + \varepsilon\tau_1(f - f(z))$

mit $\tau_1 : \mathfrak{m}_z \to \mathbb{C}$ linear, da τ linear und für $f, g \in \mathfrak{m}_z$, $\underset{\varepsilon\tau_1(fg)}{\underset{\shortparallel}{\tau(f.g)}} = \underset{(\varepsilon\tau_1(f))(\varepsilon\tau_1(g)) = 0}{\underset{\shortparallel}{\tau(f)\tau(g)}}$

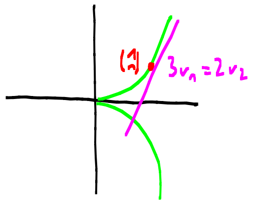
$\Rightarrow \tau_1(f.g) = 0 \Rightarrow \tau_1|_{\mathfrak{m}_z^2} = 0$

$\Rightarrow \tau_1 \in (\mathfrak{m}_z/\mathfrak{m}_z^2)^* = \mathrm{Der}_z(\mathcal{O}(Z))$.

(4) $Z \subseteq \mathbb{C}^n$, $T_z Z = \{v \in \mathbb{C}^n \mid f(z + \varepsilon v) = 0 \ \forall f \in I(Z)\} = \{v \in \mathbb{C}^n \mid f(z+\varepsilon v) = 0 \ \forall f \in \text{Erzeugendensys. v. } I(Z)\}$

Bsp: $Z = V(x_1^3 - x_2^2) \subseteq \mathbb{C}^2$, $T_{\binom{0}{0}} Z = \{v \in \mathbb{C}^2 \mid v = \binom{v_1}{v_2};\ (0 + v_1\varepsilon)^3 - (0 + v_2\varepsilon)^2 = 0\} = \mathbb{C}^2$

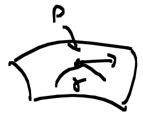
$\binom{a}{b} \in Z - \{\binom{0}{0}\}$ $\quad T_{\binom{a}{b}} Z = \{v = \binom{v_1}{v_2} \in \mathbb{C}^2 \mid \underset{a^3 + 3a^2v_1\varepsilon}{\underset{\shortparallel}{(a + v_1\varepsilon)^3}} - \underset{b^2 + 2b\varepsilon v_2}{\underset{\shortparallel}{(b + v_2\varepsilon)^2}} = 0\} = \{v = \binom{v_1}{v_2} \in \mathbb{C}^2 \mid 3a^2 v_1 = 2bv_2\}$



Übung: $Sl_n \subseteq M_n$, $Sl_n = \mathcal{V}(\det - 1)$, $T_{\mathbb{1}} Sl_n = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det(\mathbb{1} + \varepsilon A) - 1 = 0\} = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \operatorname{Spur} A = 0\}$

Tangentialraum als Äquivalenzklasse von Wegen $[\gamma]$, $\gamma : I \to \mathbb{C}^n$ mit $\gamma(0) = p \in \mathbb{C}^n =: T_p\mathbb{C}^n = \{[\gamma]\}$

Äquiv.rel. $\gamma \sim \delta$ wenn $\gamma(0) = \delta(0)$ und $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} \gamma(0) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \delta(0)$ d.h. stimmen bis 1. Ordn. überein



$\partial_v(p) = \gamma$
$\gamma(t) = p + tv$

umgekehrt $[\gamma] \mapsto \partial_{\dot\gamma}(f)(p) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} f \circ \gamma$ $\quad \gamma(0) = p$

$$= \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{d x_i \circ \gamma}{dt}\Big|_{t=0}}_{v_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p$$

Bem.: Z affine Varietät $\quad \mathcal{O}_{Z,p}$ = Funktionskeime in p = Funktionen die lokal um p def. sind.

Äqu.-rel. $f \equiv g \Leftrightarrow f|_U = g|_U$ für eine offene Umgebung um p. $\mathfrak{m}_p \subseteq \mathcal{O}_{Z,p}$ ist Max. ideal weil

$\mathcal{O}_{Z,p}/\mathfrak{m}_p \cong \mathbb{C}$ und eindeutig
$[f] \mapsto f(p)$

$Z = \mathbb{C}^n \quad v \in \mathbb{C}^n \quad \partial_v f = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad x_i$ Koordinatenfunktionen auf $\mathbb{C}^n$

$f(p + tv) \overset{\text{Taylor}}{=} f(p) + t \cdot \partial_v f + O(t^2)$

$\frac{d}{dt}\big|_{t=0}$ = Richtungsabl. von f in p in Richtung $v \qquad g(t) = f(p + tv)$ (fest)

Def.: $\theta_{v,p} : \mathcal{O}(Z) \to \mathbb{C}[\varepsilon]$ $\quad$ ($\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$)
$\qquad f \mapsto f(p) + \varepsilon \partial_v(f)(p)$

$Z \subseteq \mathbb{C}^n$ affine Varietät mit Koordinatenring $\mathcal{O}(Z) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I(Z)$. Sei $\partial_v(f)(p) = 0 \quad \forall_{f \in I(Z)}$

Damit $\partial_v : \mathcal{O}(Z) \to \mathbb{C}$ Punktderivation. Umgekehrt, falls $\partial : \mathcal{O}(Z) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I(Z) \to \mathbb{C}$ Punktderivation,

dann ist auch $\bar\partial : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \xrightarrow{\text{Proj.}} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I(Z) \xrightarrow{\partial} \mathbb{C}$ ist eine Punktderivation (nachrechnen).

Folgerung: $T_p Z = \{v \in \mathbb{C}^n \mid \partial_v(f)(p) = 0 \quad \forall_{f \in I(Z)}\} = \{v \in \mathbb{C}^n \mid f(p + \varepsilon v) \equiv 0 \ \forall_f$ Erzeugendensystem von $I(Z)\}$

Merken: $Z \subseteq \mathbb{C}^n$ affine Varietät, $\mathcal{O}(Z) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I(Z)$, $I(Z) = (f_1, \dots, f_r)$

$\qquad T_p Z = \{v \in \mathbb{C}^n \mid f_i(p + \varepsilon v) \equiv 0 \ \forall_{i = 1, \dots, r}\}$

Bem.: Tangentialbündel $TZ \to Z$
$\qquad \coprod T_p Z \to \gamma(0)$ analytisch mit Topologie versehen
$\qquad \ \ \gamma$

Algebraisch: $TZ = \operatorname{Mor}(\operatorname{Spec}(\mathbb{C}[\varepsilon]), Z)$

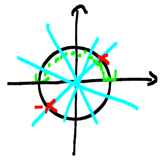
8. Projektive Geometrie

$\mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}/_\sim$ mit $v \sim w \Leftrightarrow \exists_{\lambda \in \mathbb{C}^*} : \lambda v = w \quad = \{[x_0 : \ldots : x_n] \mid x_i \in \mathbb{C}$ und nicht alle $= 0\}$
homogene Koordinaten

Bem.: $[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{CP}^n$ mit $x_j \neq 0$, dann ist $\left[\frac{x_0}{x_j} : \ldots : 1 = \frac{x_j}{x_j} : \ldots \frac{x_n}{x_j}\right] = [x_0 : \ldots : x_n]$

Bsp.: $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}/_\sim$

$\mathbb{RP}^1 = \mathbb{R}\cup\{\infty\} = S^1 = \mathbb{R}^2\setminus\{0\}/\sim$

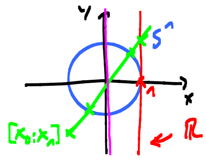


Gerade in $\mathbb{R}^2 \,\hat{=}\,$ Punkt in $\mathbb{RP}^1$

$\mathbb{RP}^1 = S^1$

$\mathbb{RP}^1 \supseteq U_0 = \{[x_0 : x_1] \mid x_0 \neq 0\} = \{[1 : x] \mid x \in \mathbb{R}\}$

$U_1 = \{[y : 1] \mid y \in \mathbb{R}\}$



D.h. $U_0 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$

$[x_0 : x_1] \mapsto \frac{x_1}{x_0}$

$[1 : t] \leftarrow t$

$\mathbb{CP}^1 \supseteq U_0 = \{[1 : x]\}$

$U_1 = \{[y : 1]\}$

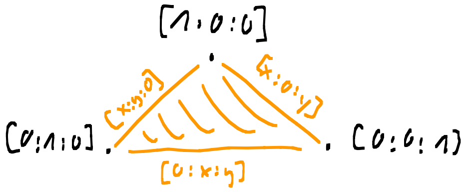
$U_0 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$

$[z_0 : z_1] \mapsto \frac{z_1}{z_0}$

$[1 : z] \leftarrow z$

D.h. $\mathbb{CP}^1 = S^2$

Bild: $\mathbb{CP}^2 = \mathbb{C}^3\setminus\{0\}/\sim$



Funktionen auf $\mathbb{CP}^n$: Ein Polynom $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$. Sei $f(v) = 0$ $v \in \mathbb{C}^{n+1}$.

Damit $f([v]) = 0$ Sinn macht, muss $f(\lambda v) = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}^\times$. Falls f homogen von Grad $m \in \mathbb{N}$,

d.h. $f = \sum_{\underline{j}} a_{\underline{j}} X^{\underline{j}}$, $\underline{j} = (j_1, \dots, j_{n+1})$, $X^{\underline{j}} = X_1^{j_1} \dots X_{n+1}^{j_{n+1}}$ und $|\underline{j}| = \sum_{i=1}^{n+1} j_i = m$, $\forall \underline{j}$ mit $a_{\underline{j}} \neq 0$

Folgerung: f homogen von Grad m, $f(\lambda v) = \lambda^m f(v)$

Folgerung: Wenn f homogen von Grad m, dann ist $f([v]) = 0$ wohldefiniert. Denn falls $f(v) = 0$, dann ist

$f(\lambda v) = \lambda^m f(v) = \lambda^m \cdot 0 = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^\times$.

Def.: Homogener Koordinatenring $\mathbb{C}[\mathbb{CP}^n] = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_{n+1}] = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{C}[X_1, \dots, X_{n+1}]_i$ wobei

$\mathbb{C}[X_1, \dots, X_{n+1}]_i$ ist die Menge der homogenen Polynome vom Grad i.

$f \in \mathbb{C}[\mathbb{CP}^n]$, dann ist i. A. $f([v])$ nicht wohldefiniert, denn $f(\lambda v) = \lambda^m f(v)$ falls f homogen von Grad m.

$\mathbb{C}(\mathbb{CP}^n)$ Körper der rationalen Funktionen $= \{\frac{f}{g} \mid f, g \in \mathbb{C}[\mathbb{CP}^n]$ homogen von gleichem Grad$\}$

$\mathbb{C}(\mathbb{CP}^n) \ni \frac{f}{g}(\lambda v) = \frac{f(\lambda v)}{g(\lambda v)} \overset{\text{gl. Grad}}{\underset{m}{=}} \frac{\cancel{\lambda^m} f(v)}{\cancel{\lambda^m} g(v)}$.

Übung: Was sind die regulären Funktionen auf ganz $\mathbb{CP}^n$.

Ein Ideal in $\mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ heißt homogen, falls $I = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} I \cap \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_m$, wobei $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_m =$ homogene Polynome vom Grad m.

Ein Polynom ist die Summe von Monomen der Form $x_0^{a_0} x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$. Grad$(x_0^{a_0} x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}) = a_0 + a_1 + \dots + a_n$

Grad$(x_1^3 x_2^5) = 8$. Polynom heißt homogen von Grad m falls es eine Linearkombination ist von Monomen vom Grad m.

Bsp.: $\mathbb{C}[x_0, x_1]_3 = \langle x_0^3, x_0^2 x_1, x_0 x_1^2, x_1^3 \rangle$, $\mathbb{C}[x_0, x_1] = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{C}[x_0, x_1]_m$

I heißt homogen falls $\forall f \in I: f = \sum_{j=0}^{m} f_j$ mit f_j homogen, Grad j $\Rightarrow f_0, f_1, \dots, f_m \in I$

Monom: $x_0^{a_0} x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}(\lambda v) = (\lambda v_0)^{a_0} (\lambda v_1)^{a_1} \cdots (\lambda v_n)^{a_n} = \lambda^{a_0 + \dots + a_n} (v_0^{a_0} \cdots v_n^{a_n}) = \lambda^{\text{Grad des Monoms}} x_0^{a_0} x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}(v)$

Es folgt: f homogen, Grad m: $f(\lambda v) = \lambda^m f(v) \ \forall v \in \mathbb{C}^{n+1}$ Übung: "$\Leftarrow$" gilt auch

Sei $I \subseteq \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ Ideal, homogen: $\mathcal{V}(I) = \{[v] \in \mathbb{CP}^n \mid f(v) = 0 \ \forall f \in I, f \text{ homogen}\}$ wohldefiniert

da $f(\lambda v) = \lambda^m f(v) = 0$ falls $f(v) = 0$, f homogen.

Umgekehrt: Sei $X \subseteq \mathbb{CP}^n$. $I(X) = \{ f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n] \mid f(\lambda v) = 0 \ \forall [v] \in X \ \forall \lambda \in \mathbb{C}^* \}$

Beachte: $I(X)$ ist homogen, denn: Sei $f = f_0 + f_1 + \dots + f_m$, f_i homogen, Grad $f_i = i$

$f(v) = 0$, $f_0(v) + f_1(v) + \dots + f_m(v) = 0$, $\lambda_1 \in \mathbb{C}^*$, $f(\lambda_1 v) = f_0(v) + \lambda_1 f_1(v) + \dots + \lambda_1^m f_m(v) = 0$

$\lambda_2 \in \mathbb{C}^*$, $f(\lambda_2 v) = f_0(v) + \lambda_2 f_1(v) + \dots + \lambda_2^m f_m(v)$, ... Vandermonde $\Rightarrow f_0(v), f_1(v), \dots, f_m(v) = 0$

Wie im affinen Fall: homogene Ideale $\longrightarrow$ Nullstellenmengen in $\mathbb{CP}^n$, $I \mapsto \mathcal{V}(I)$ Verschwindungsideal

homogen $\longleftarrow X \subseteq \mathbb{CP}^n$

Def.: Zariski Topologie auf dem $\mathbb{CP}^n$: abgeschlossene Teilmengen = Nullstellenmengen von homogenen Idealen.

Projektiver Nullstellensatz:

Sei $J \subseteq \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ homogenes echtes Ideal, dann gilt: $\mathcal{V}(J) = \emptyset \Leftrightarrow \sqrt{J} \supseteq (x_0, x_1, \dots, x_n)$

$\mathcal{V}(J) \neq \emptyset \Rightarrow I(\mathcal{V}(J)) = \sqrt{J}$

Bew.: $\tilde{\mathcal{V}}(J) \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$, dies ist ein Kegel, d.h. wenn $v \in \tilde{\mathcal{V}}(J) \Rightarrow \lambda v \in \tilde{\mathcal{V}}(J) \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$

denn: $f \in J$, $f = \sum_{j=0}^{m} f_j$, f_j homogen. Da J homogen folgt $f_0, f_1, \dots, f_m \in J$

Damit gilt aber: $f_i(\lambda v) = \lambda^i f_i(v) = 0 \quad \forall i = 0, \dots, m \Rightarrow f(\lambda v) = \sum_{i=0}^{m} f_i(\lambda v) = 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$

Somit: $v \in \tilde{\mathcal{V}}(J) \Rightarrow \lambda v \in \tilde{\mathcal{V}}(J)$. Bem.: Man nennt $\tilde{\mathcal{V}}(J)$ auch den affinen Kegel über $\mathcal{V}(J)$

J echtes Ideal $\Rightarrow \tilde{\mathcal{V}}(J) \neq \emptyset$ und $I(\tilde{\mathcal{V}}(J)) = \sqrt{J}$. Was bedeutet $\mathcal{V}(J) = \emptyset$.

Sei $v \in \tilde{\mathcal{V}}(J)$. Angenommen: $v \neq 0 \Rightarrow \mathbb{C}v \subseteq \tilde{\mathcal{V}}(J) \Rightarrow [v] \in \mathcal{V}(J)$ ↯ da $\mathcal{V}(J) = \emptyset$

Also: $\mathcal{V}(J) = \emptyset \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{V}}(J) = 0 \Leftrightarrow I(\tilde{\mathcal{V}}(J)) = \sqrt{J} = (x_0, \dots, x_n)$

Wenn $\mathcal{V}(J) \neq \emptyset$: $\mathcal{V}(J) = \{[v] \in \mathbb{CP}^n \mid f(v) = 0 \ \forall f \in J \text{ homogen}\}$ $\tilde{\mathcal{V}}(J) = \{v \in \mathbb{C}^{n+1} \mid f(v) = 0 \ \forall f \in J\} =$

$= \{v \in \mathbb{C}^{n+1} \mid f(v) = 0 \ \forall f \in J \text{ homogen}\}$. Es folgt $I(\mathcal{V}(J)) = I(\tilde{\mathcal{V}}(J)) = \sqrt{J}$

Übung: $J \subseteq \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ homogen: $[v] \in \underset{\mathbb{CP}^n}{\mathcal{V}(J)} \Leftrightarrow \mathbb{C}v \subset \underset{\mathbb{C}^{n+1}}{\tilde{\mathcal{V}}(J)}$

Def.: X heißt projektive Varietät falls $X \subseteq \mathbb{CP}^n$ eine Zariski-abgeschlossene Teilmenge ist

Die Überdeckung des $\mathbb{CP}^n$ durch affine Teilmengen

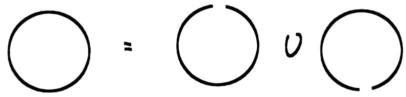
Für $i = 0, \dots, n$ sei $U_i = \{[v] \in \mathbb{CP}^n \mid v_i \neq 0\}$

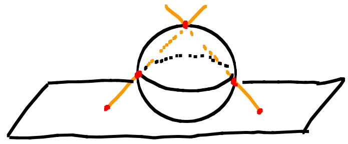
Beachte: $U_i \cong \mathbb{C}^n$ $\quad [v] = [v_0 : v_1 : \dots : v_n] \longrightarrow \left(\frac{v_0}{v_i}, \frac{v_1}{v_i}, \dots, \frac{v_{i-1}}{v_i}, \frac{v_{i+1}}{v_i}, \dots, \frac{v_n}{v_i}\right)$ wohldefiniert

$$[a_0:a_1:\dots:a_{i-1}:1:a_{i+1}:\dots:a_n] \longleftarrow (a_0,a_1,\dots,a_{i-1},a_{i+1},\dots,a_n)$$

Lemma: $\mathbb{CP}^n = \bigcup U_i$ und $U_i \subset \mathbb{CP}^n$ ist offen.

Bew.: $[v] \in \mathbb{CP}^n$, $[v] = [v_0 : v_1 : \dots : v_n]$ $\exists j : v_j \neq 0 \Rightarrow [v] \in U_j \Rightarrow \mathbb{CP}^n = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$

Bsp.: $\mathbb{RP}^1 =$ 

$\mathbb{CP}^1 = S^2$ 

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \supset & \mathbb{C}-\{0\} \\ & & \big\uparrow z \;\big\downarrow z^{-1} \\ \mathbb{C} & \supset & \mathbb{C}-\{0\} \end{array}$$

U_i sind offen: x_i Koordinatenfunktion, ist homogen $\Rightarrow \mathfrak{J}_i = (x_i)$ von x_i erzeugtes Ideal, ist homogen. $\mathcal{V}(\mathfrak{J}_i) = \{[v] \in \mathbb{CP}^n \mid x_i(v) = 0\} = \{[v] \in \mathbb{CP}^n \mid v_i = 0\}$ = Komplement von U_i

Was ist $U_i \cap U_j$?

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{v_0}{v_i} \dots \frac{v_n}{v_i} \quad U_i & \hookleftarrow & & U_i \cap U_j & & \hookrightarrow & U_j \quad \frac{v_0}{v_j}, \dots, \frac{v_n}{v_j} \\
\cong & & \cong & & \cong & & \cong \\
\mathbb{C}^n & \supset & \{u \in \mathbb{C}^n \mid x_j(u) \neq 0\} & & \{v \in \mathbb{C}^n \mid y_i(v) \neq 0\} & \subset & \mathbb{C}^n
\end{array}$$

Koordinaten $x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ — offene, affine Teilmengen — Koordinaten $y_0, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n$

$\cdot \frac{v_i}{v_j}$

Was hat die "affine Topologie" auf $U_i \cong \mathbb{C}^n$ zu tun mit der projektiven Zariski-Topologie?

$f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ homogen. $f|_{U_0}([1, v_1, \dots, v_n]) := f(1, v_1, \dots, v_n)$ offensichtlich: $f|_{U_0} \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ aber nicht homogen. $X \subseteq \mathbb{CP}^n$ abgeschlossen, $X \cap U_0 \neq \emptyset$. $\mathfrak{J} = I(X) \subseteq \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$

$f \in \mathfrak{J}$, $v \in X \cap U_0$, $f|_{U_0}([v]) = f(1, v_1, \dots, v_n) = 0 \Rightarrow [v] \in \mathcal{V}(f|_{U_0}, f \in \mathfrak{J}) \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$

Was bedeutet homogenisieren: $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \to \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$

$$f \mapsto \tilde{f} \quad \text{wird homogenisiert}$$

Bsp.:
$$\begin{array}{ccc} x_1^3 + x_1 x_2 + x_3^5 & \rightsquigarrow & x_0^2 x_1^3 + x_0^3 x_1 x_2 + x_3^5 \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3] & \rightsquigarrow & \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3] \end{array}$$

Kann zeigen: $X \cap U_0$ ist abgeschlossen in der Zariski Topologie auf U_0 als affine Varietät

genauer: $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \underset{\text{dehomogenisieren}}{\overset{\text{homog.}}{\rightleftarrows}} \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ ergibt Bijektion:

$$\underset{\text{abgeschlossen}}{Y \subseteq U_0 \cong \mathbb{C}^n} \longrightarrow \bar{Y} \subset \mathbb{CP}^n$$

$$X \cap U_0 \longleftarrow \underset{X \cap U_0 \neq \emptyset}{X \subseteq \mathbb{CP}^n}$$

zwischen abgeschlossenen Teilmengen.

Warum projektive Varietäten?

• projektiv $\hat{=}$ algebraische Version von kompakt !

<u>Theorem</u>: Seien $X, Y \subseteq \mathbb{CP}^n$ Varietäten irreduzibel, dim r, dim s. Wenn $r+s \geq n \Rightarrow X \cap Y \neq \emptyset$

⌜<u>Miles Reid</u>: Algebraic Geometry for Undergraduates⌟