Experimentalphysik - Struktur der Materie Teil 2: Kernphysik

1. Was ist das Besondere an Kernphysik?

- Im Atomkern spielen drei der vier elementaren Wechselwirkungen eine wichtige Rolle:
  - elektromagnetische WW
  - schwache WW

  $\}$ Quantenelektrodynamik, QED für elektroschwache WW

  - starke WW $\}$ QCD Quantenchromodynamik
- Aufgrund der Anzahl der Konstituenten (10-200 Nukleonen) kann man den Atomkern weder mit exakten noch mit statistischen Methoden gut beschreiben.

  ↳ Mesoskopisches System
- Die Größe des Systems ($\sim 10^{-15}$ m) erfordert sehr komplexe Experimente
- Kernphysik ist auch in den größten Systemen (Sterne) sehr wichtig

  ↳ „nukleare Astrophysik"

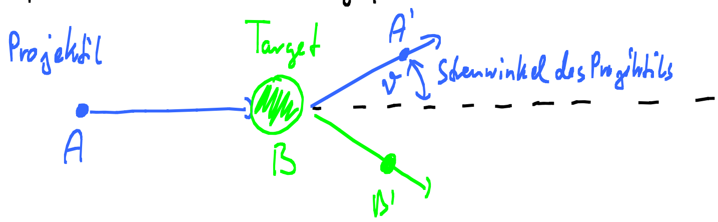
Präsentation: Kernphysik

2. Aufbau und Eigenschaften von Atomkernen

2.1 Die Größe von Atomkernen

Streuung hochenergetischer kleiner Teilchen

2.1.1 Streuprozesse und Wirkungsquerschnitt



„Elastische Streuung" (keine Reaktion)

$$A + B \longrightarrow A' + B'$$

$$\left(\tfrac{E_A}{c}, \vec{p}_A\right) \ (0,0) \longrightarrow \left(\tfrac{E_{A'}}{c}, \vec{p}_{A'}\right) \ \left(\tfrac{E_{B'}}{c}, \vec{p}_{B'}\right)$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass A' unter einem Winkel ϑ in ein Raumwinkelelement $d\Omega$ gestreut wird?

↳ Geometrische und WW-Effekte

ⓐ Totaler Wirkungsquerschnitt (WQ)

$$\sigma_{total} = \frac{(\text{Ereignisse/sec})}{(\text{Projektile/sec})(\text{Targetstreuzentren}/m^2)}$$

(Ereignisse/sec) ← z.B. Projektilstreuung

$[\sigma] \hat{=} m^2$

$10^{-15}\ m \hat{=} 1\ fm$ (fermi, femtometer)

$10^{-28}\ m^2 \hat{=} 10^{-24}\ cm^2 = 10^2\ fm^2 \equiv 1b$ (Barn)

$10^{-31}\ m^2 \hat{=} 1\ mb$ (Millibarn)

ⓑ Differentieller WQ

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\vartheta = \frac{(\text{Ereignisse in } d\Omega(\vartheta)/\text{sec})}{(\text{Projektile/sec})(\text{Targetstreuzentren}/m^2)}$$

- Wie groß sind die Strukturen, die man in Streuexperimenten bestenfalls auflösen kann?
  Limit ist die deBroglie-Wellenlänge des Projektils: $\lambda\!\!\!^{-} = \frac{\hbar}{|\vec{p}_A|} \equiv \frac{\hbar}{p_A}$ $\hbar \sim 6{,}58 \cdot 10^{-22}\ MeV \cdot s$

z.B. $p_A = 130\ MeV/c \rightarrow \lambda\!\!\!^{-} = \frac{(\hbar c)}{130\ MeV} = \frac{197\ MeV \cdot fm}{130\ MeV} \simeq 1{,}5\ fm$

Atomkerne (5 fm) → $p \sim 10 - 100\ MeV/c$

Protonen/Neutronen (1 fm) → $p \sim 150\ MeV/c$

Quarks (0,1 fm) → $p \sim 1{,}5\ GeV/c$

Dazu notwendige Energie: $E^2 = p^2c^2 + (m_0c^2)^2$

$\rightarrow E \sim p \cdot c$ für $E \gg m_0c^2$

2.1.2 Rutherfordstreuung

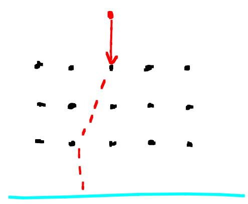
Annahme zu Beginn des 20. Jhd: (J.J. Thomson-Modell)
Positive Ladung und Masse sind homogen über Atomvolumen ($4 \cdot 10^{-30}\ m^3$) verteilt, darin eingebettet punktförmige Elektronen.
Experiment: Schicke α-Teilchen ($^4He^{++}$-Atomkern) durch eine Folie, was würde passieren?

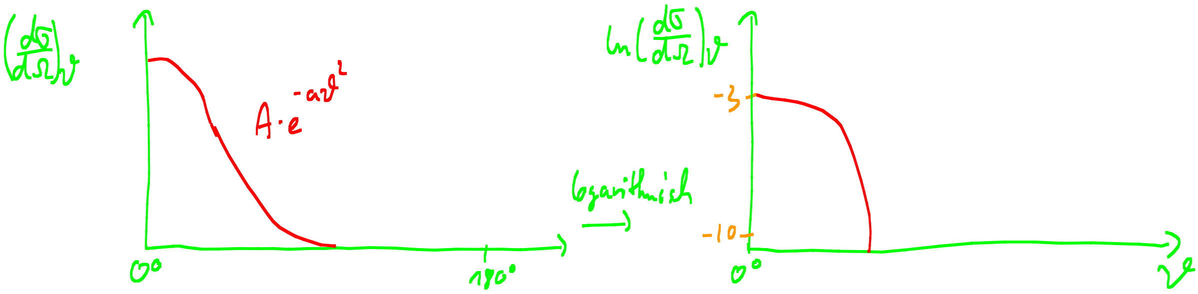
(i) homogene positive Ladung beeinflusst α-Teilchen kaum

(ii) e^- lenken α nur wenig ab, da $m(e^-) \ll m(^4He^{++})$

↳ sehr viele kleine Ablenkungen

↳ Gauß-Verteilung der gestreuten α-Teilchen um 0°





Wenn Thomson-Modell stimmt!

1909: Rutherford, Geiger, Marsden führen Streuexperimente durch:

^{226}Ra emittiert $^4He^{++}$, $E_\alpha \sim 4{,}8$ MeV; $4{,}6$ MeV

$\rightarrow$ Atomkern

Präsentation: Rutherford

Ernest Rutherford (1871 - 1937)

$\rightarrow$ Atom enthält positiv geladenen Atomkern der Ladung $(Z \cdot e)$, darin konzentriert sich fast die gesamte Atommasse

$\rightarrow$ Elastische Streuung eines „leichten" Projektils $(m(\alpha) = 4, z(\alpha) = 2)$ am festen Coulombpotential eines schweren Targetkerns $(m(Au) = 197, Z(Au) = 79)$

$$E_{Coul} = \underbrace{\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)}_{1{,}44 \text{ MeV}\cdot\text{fm}} \cdot \frac{z Z}{r} = E_{pot}$$

$\rightarrow$ Hyperbelbahnen

E_α darf nicht zu groß sein, sonst wird auch die starke WW wichtig

$$\boxed{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth} = \left(\frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4E_\alpha}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sin^4(\vartheta/2)}\right)}$$

„Rutherford'sche Streuformel"

Abb. 2.1, 2.2, 2.3

- Wie groß ist der Impulsübertrag?

$|\vec{q}| \equiv \Delta p = |\vec{p}_f - \vec{p}_i|$ mit $|\vec{p}_f| = |\vec{p}_i|$ (nur Richtungsänderung)

$\rightarrow |\vec{q}| = 2 \cdot |\vec{p}_i| \cdot \sin\vartheta/2 = 2 \cdot p_\alpha \sin\vartheta/2$

$\rightarrow$ WQ geht mit $\frac{1}{|\vec{q}|^4}$

2.1.3 Aufbau des Atomkerns

Atomkern besteht aus A Nukleonen.

Z Protonen, $m(p) = 938{,}27\ \frac{MeV}{c^2}$

N Neutronen, $m(n) = 939{,}57\ \frac{MeV}{c^2}$

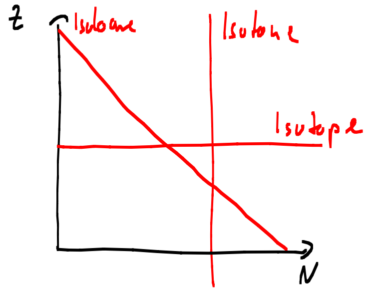
↳ Chadwick (1932)

Periodensystem der Kernphysik

Isotope : $Z = const$

Isotone : $N = const$

Isobare : $A = const$



2.1.4 Mott-Streuung und Formfaktor

Streuung von Elektronen (e^-) am Kern

↳ reine Coulomb-WW, d.h. man misst die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ des Atomkerns

↳ Elektron hat Eigendrehimpuls / Spin $\vec{s} \neq 0$ im Gegensatz zu α-Teilchen

→ Mott-Wirkungsquerschnitt

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth} \cdot \left(1 - \beta^2 \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right) \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

(Erhaltung der Helizität
→ weniger Streuung unter großen Winkeln)

- Bisher: Streuung an punktförmigen Target
  Jetzt: Streuung an ausgedehnter Ladungsverteilung

Optik : Laser auf Lochblende

1. Minimum bei $\sin\theta = 1{,}22\ \frac{\lambda}{d}$

Wellenlänge Laser

Durchmesser Scheibe

Interferenzmuster

Man misst : $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \cdot \underbrace{|F(q^2)|^2}$

Geometrie des Targetkerns

$F(q^2) \equiv$ Formfaktor mit $\vec{q} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$

(Da e^- punktförmig ist ($< 10^{-18}$ m) muss man seine Ausdehnung nicht beachten)

Messung $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp}$ in Abhängigkeit von Streuwinkel ϑ oder Impulsübertrag q^2

- Zusammenhang zwischen Formfaktor $F(q^2)$ und der Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}) \propto Ze\, |\underbrace{\psi_p(\vec{r})}|^2$

Aufenthaltswahrscheinlichkeit Proton

$F(q^2)$ ist die Fouriertransformierte von $\rho(\vec{r})$:

$$F(q^2) = \frac{1}{Ze} \cdot \int d^3r \cdot \rho(\vec{r}) \cdot \exp\left(\frac{i}{\hbar} \cdot \vec{q} \cdot \vec{r}\right)$$

$$\hookrightarrow \quad \rho(\vec{r}) = \frac{Ze}{(2\pi)^3} \int d^3q \; F(q^2) \cdot \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\, \vec{q} \cdot \vec{r}\right)$$

Probleme: 1.) Man misst $F(q^2)$ nur über begrenzten q-Bereich

2.) $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp}$ $(q \to \infty)$ ist sehr klein $\left(\frac{1}{q^4}\right)$

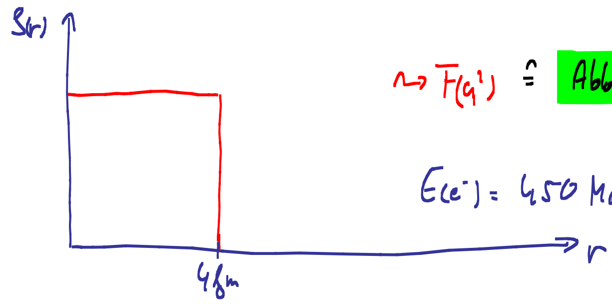
↳ iteratives Verfahren

→ Nehme $\rho(\vec{r})$ an → berechne $F(q^2)$

ⓐ $q \to 0$ ⤳ $F(q^2) \to 1$

Bei niedrigen Impulsüberträgen verhält sich der Targetkern wie ein Punktteilchen

ⓑ $q = 0$ ⤳ $F(q^2) < 1$



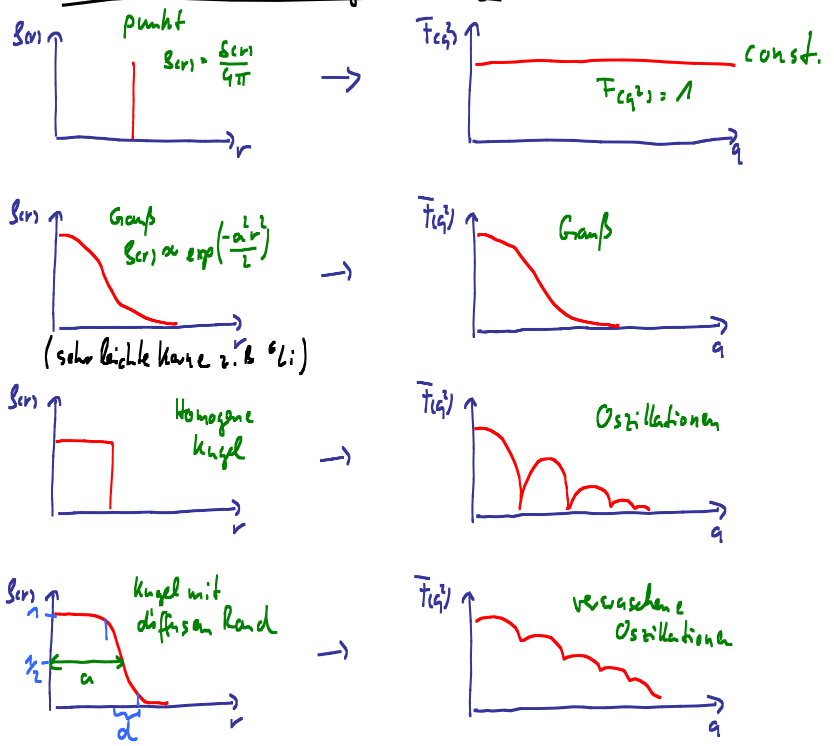
⤳ $F(q^2) \hat{=}$ Abb. 2.4

$E(e^-) = 450$ MeV

$$F(q^2) = \frac{3(\sin x - x\cos x)}{x^3}, \quad x = \frac{q \cdot 4\,\mathrm{fm}}{\hbar}$$

Abb. 2.5

Verschiedene Ladungsverteilungen



$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left(\frac{r-a}{d}\right)}$$ „Fermiverteilung"

$a \hat{=}$ Radius der halben Dichte

Abb. 2.6

$d \hat{=}$ Dickenparameter $\quad 0{,}63\,\rho_0 - 0{,}38\,\rho_0$

$d' \hat{=}$ Oberflächendicke $= 4{,}39\,d$, $\;0{,}9\,\rho_0 - 0{,}1\,\rho_0$

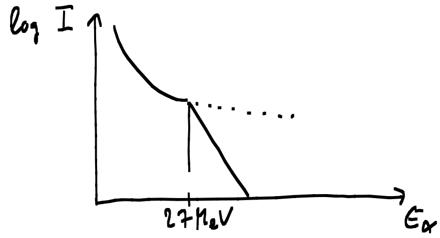
$a = 1{,}18\ \text{fm}\ A^{1/3} - 0{,}48\ \text{fm}$

$d' = 2{,}4\ \text{fm}$

z.B. ^{40}Ca $\quad A = 40 \Rightarrow a = 3{,}6\ \text{fm}$

$$\rho_{Nukleon} \sim \frac{40}{\frac{4}{3}\pi a^3} \sim 0{,}2\ \frac{\text{Nukleonen}}{\text{fm}^3}$$

- Was ist mit Massenverteilung im Kern?



α-Streuung an ^{208}Pb

$$d = \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{E_\alpha} \approx 8{,}8\ \text{fm}$$

$r_S(^4He) \sim 1{,}7\ \text{fm} \qquad r_S(^{208}Pb) \sim 6\ \text{fm}$

- Neutronenstreuung (nur starke WW)

  Problem: Starke WW nicht so gut bekannt

  $\Rightarrow$ Komplexe Modellannahmen notwendig

  $\Rightarrow$ Massenverteilung sehr ähnlich der Ladungsverteilung für stabile Kerne

  $a \sim 1{,}2\ \text{fm}\ A^{1/3}$

  $d' \sim 3{,}2\ \text{fm}$

- Abweichungen $\rho_p \leftrightarrow \rho_n$
  - Skin in Ca-Isotopen (minimal) // Neutronenhaut
  - Skin in exotischen Systemen
  - Halo Kerne 
    - ^{11}Li
      $\downarrow$
    - ^{10}Li ungebunden
    - Boromäisches System
    - Ausdehnung $^{11}Li \mathrel{\hat=} {}^{208}Pb$
  - Abweichungen von Kugelgestalt $\Rightarrow$ später

2.2 Masse von Atomkernen

- Warum wichtig?

  Stabilität von Kernen, Dripline, Spaltung, Fusion

- Warum schwierig?

  Energie wird frei, wenn 2 Nukleonen verschmelzen

Kernmasse: $m(Z, A) = m_p Z + m_n N - \frac{B}{c^2}$

$B \hat{=}$ Energie um Kern in Nukleonen zu zerlegen „Massendefekt"

2.2.1 Das Tröpfchenmodell – C.F. Weizsäckersche Massenformel (1935)

Fluidtropfen: – Versucht die Energie zu minimieren (Oberflächenspannung)

$\rightarrow$ Kugelform mit Radius R

– inkompressibel d.h. $\rho(r) = \text{const.}$

(a) Volumenenergie „Kondensationsenergie"

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

$R \sim A^{1/3}$

$B_V = a_V A$

Starke WW ist kurzreichweitig, d.h. WW nur mit nächsten Nachbarn, sonst $A \cdot (A-1)$-Abhängigkeit.

(b) Oberflächenenergie

Nukleonen an der Oberfläche sind weniger stark gebunden

$S = 4\pi R^2 = 4\pi (1{,}2\,\text{fm}\; A^{1/3})^2$

$\Rightarrow B_S = -a_S A^{2/3}$

(c) Coulombenergie

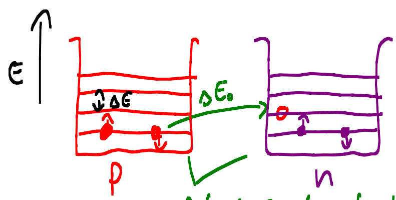
$Z(Z-1) \approx Z^2$

Protonen stoßen sich ab

$E_C = \frac{3}{5}\frac{q^2}{R}$ $\quad R \sim 1{,}2\,\text{f}\, A^{1/3}$

$\Rightarrow B_C = -a_C Z^2 A^{-1/3}$

(d) Asymmetrie-Energie



Pauli-Prinzip in Potentialtöpfen (für Fermionen, d.h. Spin = halbzahlig)

Potential der starken WW, gleiche Höhe, da Coulomb schon in B_C

- Optimal: $Z = N$
- Wenn: $\left.\begin{array}{l} N \rightarrow N+1 \\ Z \rightarrow Z-1 \end{array}\right\}$ letztes Neutron sitzt um eine Energie ΔE höher

$(N-Z)/2$	ΔE	$\Sigma \Delta E / \Delta E_0$	$(N-Z)^2/8$
1	$1 \cdot \Delta E_0$	1	0,5
2	$1 \cdot \Delta E_0$	2	2
3	$3 \cdot \Delta E_0$	5	4,5
4	$3 \cdot \Delta E_0$	8	10,5
5	$5 \cdot \Delta E_0$	13	12,5
6	$5 \cdot \Delta E_0$	18	18

$\rightarrow$ E wächst quadratisch mit $(N-Z)^2 \cdot \Delta E_0$

$\Delta E_0 \propto \frac{1}{V} \propto \frac{1}{A}$ (im Potentialtopf)

$$\rightarrow \quad B_A = -a_A' \cdot (Z-N)^2/A = -a_A' \cdot (Z-(A-Z))^2/A$$

$$= -a_A \cdot (Z - \tfrac{A}{2})^2/A$$

ⓔ Paarungsenergie Abb. 3.1

Experimentelle Beobachtung

Z gerade, N gerade (gg, even-even) $\rightarrow B_P = +\delta$

Z gerade, N ungerade (gu, even-odd) $\rightarrow B_P = 0$

Z ungerade, N gerade (ug, odd-even) $\rightarrow B_P = 0$

Z ungerade, N ungerade (uu, odd-odd) $\rightarrow B_P = -\delta$

$$\delta = a_P / A^{1/2}$$

$$\rightarrow \quad B = a_V \cdot A - a_S A^{2/3} - a_C Z^2 A^{-1/3} - a_A (Z - A/2)^2 A^{-1} \pm \begin{cases} a_P \\ 0 \end{cases} A^{-1/2}$$

Fit an Daten ergibt:

		$B(^{114}_{50}Sn_{64})$
a_V	= 15,85 MeV	1807 MeV
a_S	= 18,34 MeV	- 431 MeV
a_C	= 0,71 MeV	- 366 MeV
a_A	= 92,86 MeV	- 40 MeV
a_P	= 11,46 MeV	+ 1,1 MeV
		971 MeV

$$\rightarrow \quad m(^{114}Sn) = (50 \cdot (938{,}27) + 64 \cdot (939{,}57) - 971)\ \frac{MeV}{c^2} =$$

$$= (107047 - \underset{}{\overset{\approx 1\%}{971}})\ \frac{MeV}{c^2} = 106076\ \frac{MeV}{c^2}$$

$$B(^{114}Sn)_{exp} = 971{,}582 \pm 0{,}003 \ \text{MeV}$$

$$m(^{114}Sn)_{exp} = 106{,}075 \pm 0{,}003 \ \text{GeV}/c^2$$

$$B/A\,(^{114}Sn) \sim 8{,}5 \ \text{MeV}$$

Abb. 3.2

Abb. 3.3

- Was kann man aus Massen ableiten?

1.) Stabilität von Kernen

Isobare, $A = \text{const.}$

β-Zerfall: Umwandlung $N \leftrightarrow Z$ möglich: m(vorher) > m(nachher)

(i) A = ungerade $\rightsquigarrow B_P = 0$

$$m(Z) = m_0 + a_c Z^2 A^{-1/3} + a_A \left(Z - \frac{A}{2}\right)^2 / A$$

$$\left(\frac{\partial m}{\partial Z}\right)_A = 0 \quad \rightsquigarrow \text{Minimum}$$

Abb. 3.4

2.) Spaltung und Fusion

Erhöhung von B/A → Freisetzung von Energie

z.B. $^{180}_{72}Hg_{108} \longrightarrow \ ^{128}_{50}Sn_{78} + \ ^{52}_{22}Ti_{30}$

B/A: 8,03 MeV   8,41 MeV   8,69 MeV

→ pro Spaltung werden $\Delta E = 128\,(8{,}41\,\text{MeV} - 8{,}03\,\text{MeV}) + 5\,(8{,}69\,\text{MeV} - 8{,}03\,\text{MeV})$

$= 83\ \text{MeV}$

→ 180 g $^{180}Hg \ \hat{=}\ 6 \cdot 10^{23}$ Spaltungen

$\Delta E = 8 \cdot 10^{12}\ \text{J} \ \hat{=}\ 2200\ \text{MWh}$ (~ 2,2 Mio. Std. Staubsaugen)

$$\boxed{\begin{aligned} 1\ \text{Jahr} &\ \hat{=}\ \pi \cdot 10^7\ \text{sec} \\ \hbar c &\ \hat{=}\ 197\ \text{MeV}\cdot\text{fm} \\ \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} &\ \hat{=}\ 1{,}44\ \text{MeV}\cdot\text{fm} \end{aligned}}$$

2.3 Kernspin und Parität

(1) Kernspin $\hat{=}$ Gesamtdrehimpuls des Atomkerns

$$\vec{I} = \sum_{i=1}^{A} (\vec{l}_i + \vec{s}_i) = \vec{L} + \vec{S} = \sum_{i=1}^{A} \vec{j}_i$$

↳ $s(p) = s(n) = 1/2$

$$|\vec{I}| = \sqrt{I(I+1)} \cdot \hbar$$

Quantenzahl I

Grundzustand des Kerns

(a) $I_0 (gg) = 0$ $\uparrow\downarrow$ jj-Paare

(b) $I_0 (ug/gu) = I_0 (\underbrace{A-1}_{gg}) + j_A = 0 + j_A = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$

└ letztes Nukleon

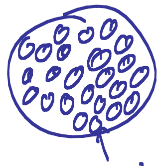
(c) $I_0 (uu) = I_0 (\underbrace{A-2}_{gg}) + |\vec{j}_p + \vec{j}_n| = 0 + |\vec{j}_p + \vec{j}_n| = 0, 1, 2, \ldots$

(2) Parität

$\psi(-r) = \hat{P} \cdot \psi(r) = \Pi \cdot \psi(r)$

Wellenfkt.

$\Pi^2 = 1 \rightarrow \Pi = \pm 1$



(a) gg-Kerne, $L = 0 \rightarrow \Pi = +1$

Bahndrehimpuls

$\rightarrow$ Grundzustand $I_0^\Pi = 0^+$

(b) Sonst bestimmen die Bahndrehimpulse der ungepaarten Nukleonen die Parität.

$\Pi = +1$ für $l = 0, 2, 4, \ldots$ $\Pi = -1$ für $l = 1, 3, 5, \ldots$

z.B. $I_0^\Pi = 7/2^- \rightsquigarrow l = 3$

$\uparrow s = 1/2$

3. Kernzerfälle

Wann sind spontane Zerfälle energetisch möglich?

(1) Zerfälle mit Kernumwandlung (α, β, Spaltung, n, p, ^{12}C, ...)

• Energiebilanz

z.B. $(Z, A) \rightarrow (Z-2, A-4) + \overbrace{^4_2He_2}^{\alpha}$

$$Q \equiv [m(Z,A) - m(Z-2, A-4) - m(^4He)] \cdot c^2 = \sum E_{kin}$$

└ „Q-Wert des Zerfalls / der Reaktion"

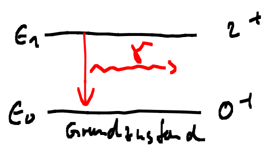
$Q > 0$: $\rightarrow$ Zerfall prinzipiell möglich

„spontaner Zerfall"

(z.B. α-Zerfall $\rightarrow$ Weizsäcker $A \gtrsim 150$)

• Man muss evtl. die Masse neu produzierter Teilchen mit berücksichtigen

(2) Zerfall innerhalb des Kerns (γ, Konversion)



$\Delta E = E_i - E_f > 0$

$\uparrow$ typisch 1 MeV

3.1 Alpha-Zerfall (Rutherford 1903)

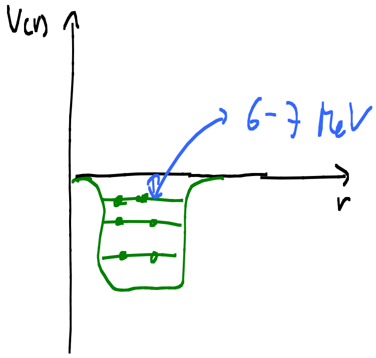
Exp. Beobachtungen

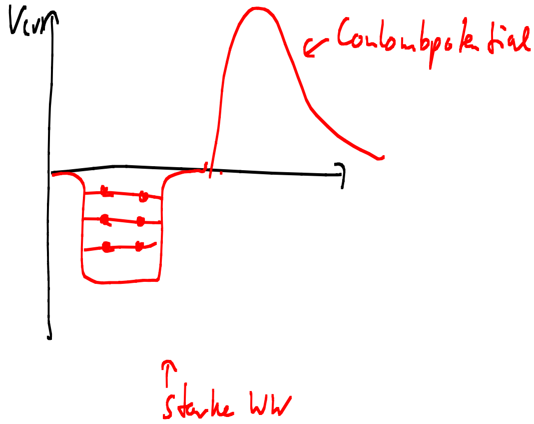
$${}^{232}_{90}Th \to {}^{228}_{88}Ra + {}^{4}_{2}He \quad \text{z.B.} \quad T_{1/2} = 1{,}4 \cdot 10^{10}\,\text{yr.} \mathrel{\hat{=}} 5 \cdot 10^{17}\,\text{sec}, \quad E_\alpha \approx 4{,}0\,\text{MeV}$$

$${}^{212}_{84}Po \to {}^{208}_{82}Pb + {}^{4}_{2}He \quad T_{1/2} = 0{,}3 \cdot 10^{-6}\,\text{sec}, \quad E_\alpha = 8{,}7\,\text{MeV}$$

$${}^{209}_{83}Bi \to {}^{205}_{81}Tl + {}^{4}_{2}He \quad T_{1/2} = 1{,}9 \cdot 10^{19}\,\text{yr}, \quad E_\alpha = 3\,\text{MeV}$$

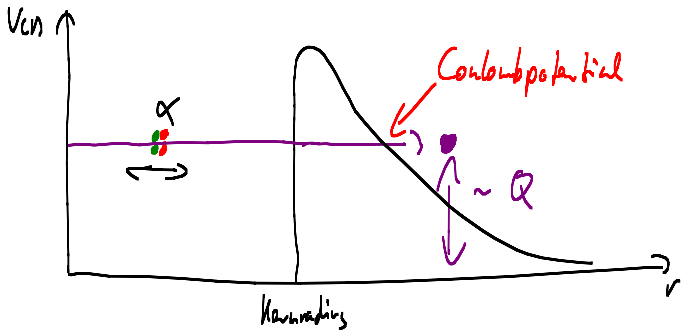
- Was passiert im Kern?





$$p + p + n + n \rightsquigarrow {}^{4}_{2}He \to Q = +28\,\text{MeV}$$

1.) Formation eines α-Teilchen im Kern



2.) ${}^{4}_{2}He$ muss auf den Coulombwall am Kernrand treffen $\to \sim 10^{26}\,\frac{\text{mal}}{\text{sec}}$

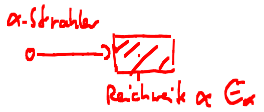
3.) ${}^{4}_{2}He$ muss durch Coulombbarriere tunneln, das hängt von E_α und V_{coulomb} ab.

Tunnelwahrscheinlichkeit, $P_{\text{Tunnel}} \propto e^{-2K \cdot d}$ $\quad d \mathrel{\hat{=}}$ Dicke der Barriere

$$K = \sqrt{2m(\alpha) \cdot [V(R) - E_\alpha] / \hbar^2}$$

Diese Tunnelwahrscheinlichkeit dominiert i.A. die Halbwertszeit des α-Zerfalls.

Abb. 4.1, 4.2 $\qquad$ Geiger-Nuttall-Regel



// Plot des Tunnelns.

$A > 150 \leadsto Q > 0$ Abb. 4.3 seltener α-Zerfall

- Cluster-Radioaktivität

$6p + 6n \;\hat{=}\; {}^{12}_{6}C_6$ $V(r)$ ist höher und $m(\text{cluster})$ ist größer
→ sehr unwahrscheinlich

Abb. 4.5 gelb → α-Zerfall, schwarz → stabil, grün (sf) → spontane Spaltung

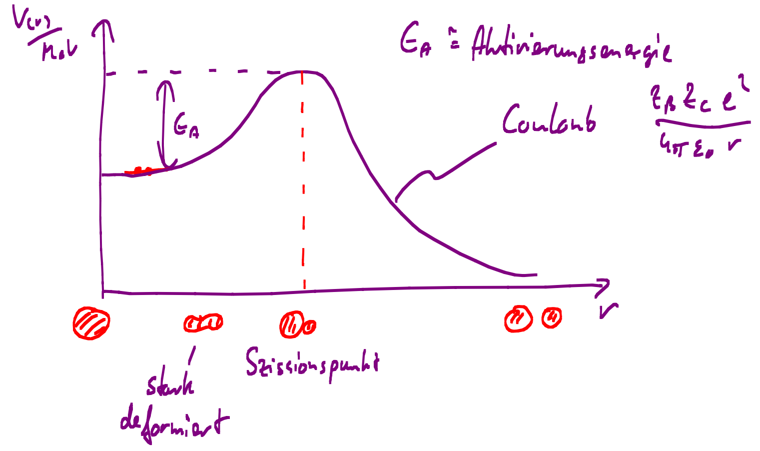
Abb. 4.4 α-Zerfall aus angeregten Zuständen <u>SPÄTER</u>

3.2. Spontanspaltung

- Exp. Beobachtung 1938 Otto Hahn, Friedrich Straßmann, Liese Meitner

$$ {}^{238}U \rightarrow {}^{145}_{57}La + {}^{90}_{35}Br + 3n \quad \left\} \begin{array}{l} T_{1/2} = 4{,}5 \cdot 10^{13}\, yr \\ Q \approx 170\, MeV \end{array} \right.$$

- Was passiert im Kern $A = B + C$

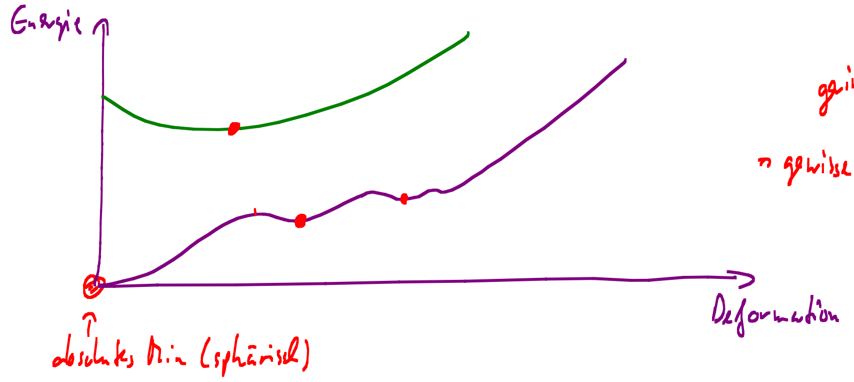


Starke Deformation → größere Oberfläche (großer Effekt), etwas kleinere Coulombenergie
⇒ <u>BE wird kleiner</u> → Masse wird größer

$BE = B_V + B_S + B_{Coul} \ldots$ $M = m_n \cdot N + m_p \cdot Z - BE$

Energie wird frei

Beispiel

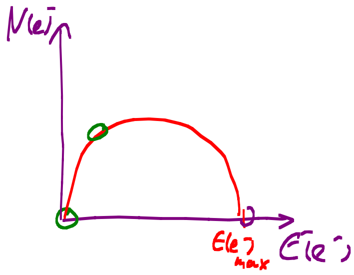


geringe Energien anstrebenswert
→ gewisse WS für lokale Minima

3.3. Beta-Zerfall

- Exp. Beobachtung:

  Manche Kerne emittieren kontinuierliches Elektronenspektrum



-> Energieerhaltung verletzt?

-> Drehimpulserhaltung verletzt?

↝ Neutrales Teilchen als dritten Stoßparameter -> Neutrinohypothese (Pauli 1931)

1900–1958

1945 Nobelpreis

$$ {}^{60}_{27}Co \xrightarrow{(-1)} {}^{60}_{28}Ni + e^- + \bar{\nu}_e $$

Spin: ganzzahlig, ganzzahlig, $1/2$, $1/2$

-> schwache WW

ⓐ β^--Zerfall

Leptonenzahl: 1, -1

$(Z,A) \to (Z+1, A) + e^- + \bar{\nu}_e$ Kern

$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$ Nukleonen

ddu duu $T_{1/2} = 10{,}3$ min

$d \to u + e^- + \bar{\nu}_e$

Q-Wert:

$$ Q_{\beta^-} = [\underbrace{m(Z,A) - m(Z+1,A)}_{\text{Kernmassen}} - m(e^-) - m(\bar{\nu}_e)] \cdot c^2 $$

man kann zeigen: $m(\bar{\nu}_e) \ll m(e^-)$

-> Tabelliert sind i. A. die Massen der neutralen Atome

-> Konvertieren nach Atommassen

↝ $m_{At}(Z,A) = m(Z,A) + Z \cdot m(e^-) - \underbrace{\sum_{i=1}^{Z} B_i}_{\text{Bindungsenergie aller Elektronen}}$

$$ \to Q_{\beta^-} = \{[m_{At}(Z,A) - Z \cdot m(e^-)] - [m_{At}(Z+1,A) - (Z+1) \cdot m(e^-)] - [m(e^-)]\} c^2 \cancel{- \{\sum_{i=1}^{Z} B_i - \sum_{i=1}^{Z+1} B_i\}} - \cancel{m(\bar{\nu}_e)} $$

$$ \simeq [m_{At}(Z,A) - m_{At}(Z+1,A)] c^2 $$

$$ = E_{kin}(e^-) + E_{kin}(\bar{\nu}_e) + (\text{Anregungsenergie Tochterkern}) $$

MAX ↔ MIN

MIN ↔ MAX

Bsp.: ${}^{14}_{6}C \to {}^{14}_{7}N + e^- + \bar{\nu}_e$ ($T_{1/2} = 5730$ yr)

Abb. 4.6

Massendefekt

$$m_{At}({}^{14}_{6}C) = 14\,u + \Delta({}^{14}_{6}C) \qquad 1\,u = \frac{1}{12}\, m_{At}({}^{12}_{6}C) = 931{,}494\,\frac{MeV}{c^2}$$

$$\Delta({}^{14}C) = 3019\,\frac{keV}{c^2} \mathrel{\hat=} 3{,}02\,\frac{MeV}{c^2}$$

$$m_{At}({}^{14}_{7}N) = 14\,u + \Delta({}^{14}_{6}N)$$

$$\Delta({}^{14}N) = 2863\,\frac{keV}{c^2} \mathrel{\hat=} 2{,}86\,\frac{MeV}{c^2}$$

$$\leadsto Q_{\beta^-} = \left(3{,}02\,\frac{MeV}{c^2} - 2{,}86\,\frac{MeV}{c^2}\right)c^2 = 0{,}16\,MeV$$

(b) β^+-Zerfall

Antiteilchen vom Elektron

$$(Z,A) \rightarrow (Z-1,A) + e^+ + \nu_e$$

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$$ (findet mit freien Protonen nicht statt)

$$u \qquad d + e^+ + \nu_e$$

$$Q_{\beta^+} = [m(Z,A) - m(Z-1,A) - m(e^+) - \cancel{m(\nu_e)}]\cdot c^2$$

$$\leadsto Q_{\beta^+} \approx \{[m_{At}(Z,A) - Z\,m(e^-)] - [m_{At}(Z-1,A) - (Z-1)\,m(e^-)] - m(e^+)\}\cdot c^2 + \cancel{B_i}$$

$$= [m_{At}(Z,A) - m_{At}(Z-1,A) - m(e^-) - m(e^+)]\,c^2$$

$$= \{m_{At}(Z,A) - m_{At}(Z-1,A)\}\,c^2 - 1{,}022\,MeV$$

da $m(e^-) = m(e^+) = 0{,}511\,\frac{MeV}{c^2}$

$\leadsto$ Die Masse des Mutteratoms muss mindestens $1{,}022\,MeV/c^2$ größer sein als die des Tochteratoms, damit $Q_{\beta^+} \geq 0$ wird.

Bsp.: ${}^{13}_{7}N \rightarrow {}^{13}_{6}C + e^+ + \nu_e$ $\quad (T_{1/2} = 9{,}9\,min)$

$$\left.\begin{aligned} \Delta({}^{13}N) &= 5{,}34\,MeV \\ \Delta({}^{13}C) &= 3{,}12\,MeV \\ 2\,m(e^-) &= 1{,}022\,MeV \end{aligned}\right\} Q_{\beta^+} = 1{,}2\,MeV$$

(c) Elektroneneinfang, K-Einfang („EC", ε)

electron capture

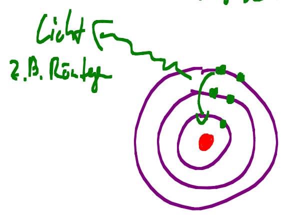
$$(Z,A) + e^- \rightarrow (Z-1,A) + \nu_e$$

diskrete Energie

$$p + e^- \rightarrow n + \nu_e$$

↳ schwache WW

Atom:



$$Q_\varepsilon = [m_{At}(Z,A) - m_{At}(Z-1,A)] - B_n(e^-)$$

$B_n(e^-) \mathrel{\hat=}$ Bindungsenergie des N-Elektrons, typisch einige keV

⇝ geht auch bei kleinen Massendifferenz

Bsp.: $^{41}_{20}Ca_{21} + e^- \to {}^{41}_{19}K_{22} + \nu_e$

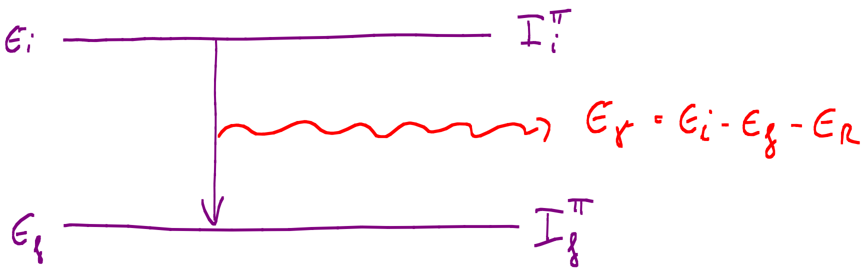
$$\left.\begin{aligned} \Delta(^{41}Ca) &= -35{,}137\ MeV \\ \Delta(^{41}K) &= -35{,}559\ MeV \\ B_K(e^-) &= 0{,}004\ MeV \end{aligned}\right\}\ Q_{EC} = 0{,}43\ MeV$$

β^+ wäre hier nicht erlaubt!

(Kosmogene Nuklide

Höhenstrahlung trifft auf stabile Isotope → radioaktives Isotop)

3.4 Gamma-Zerfall (EM-Strahlung)



$E_R \mathrel{\hat=}$ Rückstoß auf Kern

$\vec{p}_R = -\vec{p}_\gamma \qquad (\vec{p}_R + \vec{p}_\gamma \overset{!}{=} 0 = \vec{p})$

$$\leadsto E_R = \frac{p_R^2}{2m} \overset{!}{=} \frac{p_\gamma^2}{2m} = \frac{E_\gamma^2}{2mc^2} \underset{E_R \ll E_\gamma}{\approx} \frac{(E_i - E_f)^2}{2mc^2}$$

$p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c}$ // Photon

$$\leadsto E_\gamma = (E_i - E_f) - \frac{(E_i - E_f)^2}{2mc^2}$$

Bsp.: $^{60}Ni^* \to {}^{60}Ni + \gamma \qquad (^{60}Co\text{-Quelle})$

$E_i = 1{,}332\ MeV \qquad E_f = 0\ MeV$

$M = 60 \cdot u + \Delta(^{60}Ni) \simeq 60 \cdot u = 60 \cdot 931\ \frac{MeV}{c^2} \approx 5{,}6 \cdot 10^4\ \frac{MeV}{c^2}$

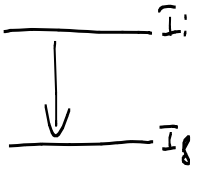
$$\leadsto E_\gamma = 1{,}332\ MeV - \frac{(1{,}332\ MeV)^2}{2 \cdot 5{,}6 \cdot 10^4\ \frac{MeV}{\cancel{c^2}} \cdot \cancel{c^2}} = 1{,}332\ MeV - 21\ eV \mathrel{\hat=} E_i - E_f$$

- <u>Multipolentwicklung des Strahlungsfeldes</u>
  - Elektrische Dipolstrahlung, $l = 1$, $E1$

    Magnetische Dipolstrahlung, $l = 1$, $M1$

    Quadrupolstrahlung, $l = 2$, $E2$ oder $M2$

Oktupolstrahlung, $l=3$, E3 oder M3



$$|I_i - I_g| \le l \le |I_i + I_g|$$

Bsp.: ⓐ $\underbrace{1^-}_{I_i^\pi} \to \underbrace{0^+}_{I_g^\pi}$: $l = 1$ => Dipolstrahlung

Elektrisch: $\Pi_g = -1^{l}\,\Pi_i$ Magnetisch: $\Pi_g = -1^{l-1}\,\Pi_i$

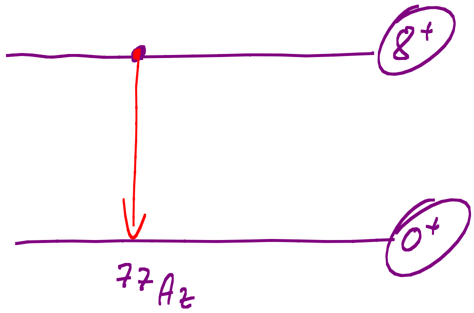
↝ E1-Strahlung

ⓑ $1^+ \to 0^+$: M1

ⓒ $2^+ \to 2^+$: $|2-2| \le l \le |2+2|$ $l = \cancel{0}, 1, 2, 3, 4$

M1, E2, M3, E4

ⓓ $4^+ \to 2^+$: $l = 2 \dots 6$ ↝ E2, M3, E4, M5 ...



$|8-0| \le l \le |8+0|$ => $l = 8$

$\boxed{\text{Isomere}}$

• Innere Konversion

Angeregter Kern kann Energie auch direkt auf Hüllenelektron übertragen.

$$E(e^-) = E_\gamma - B(e^-)$$

$B(e^-)$: Bindungsenergie des e^- K, L, M, ...

- alternativ zum γ-Zerfall

(- auch bei $0 \to 0$ möglich)

- Besonders wichtig
  - kleine Energie E_γ
  - große Kernladungen Z
  - große Multipolordnung (Drehimpulsmitnahme)

Konversionskoeffizient: Zerfallswahrscheinlichkeit

$$\alpha = \frac{w(e^-)}{w(\gamma)}$$

Abb. 4.9

4. Kernreaktionen und Beschleuniger

4.1 Kernreaktionen

$$a + A \rightarrow b + B$$

$a \hat{=}$ Projektil $\qquad b \hat{=}$ leichtes Endprodukt

$A \hat{=}$ Target $\qquad B \hat{=}$ schwerstes Endprodukt

$$A\,(a,b)\,B$$

Bsp.: (Rutherford 1919)

$${}^{4}_{2}He + {}^{14}_{7}N \rightarrow {}^{1}_{1}H + {}^{17}_{8}O \qquad {}^{14}N(\alpha,p)^{17}O$$

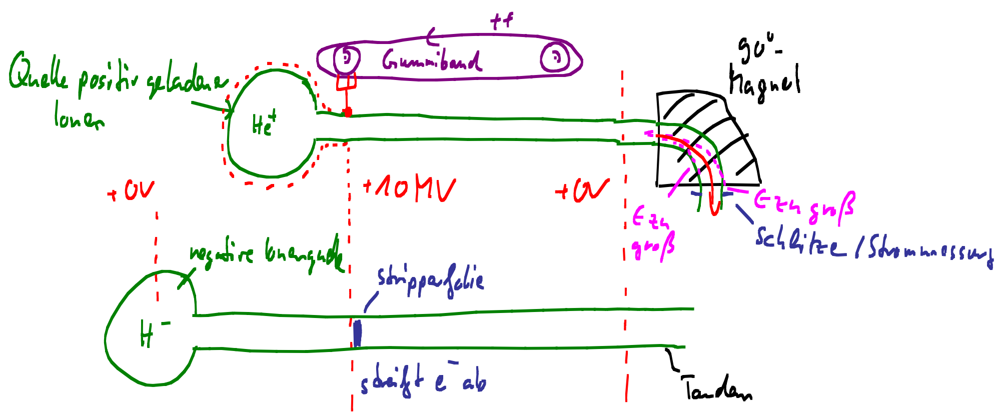
(• Neutroneneinfang : ${}^{115}In\,(n,\gamma)\,{}^{116}In$)

⇝ Man wünscht sich eine Quelle hochenergetischer Ionen mit variabler Energie → Beschleuniger

4.2 Beschleuniger

ⓐ Elektrostatische Beschleuniger

Van de Graaf / Tandem Van de Graaf



Bsp.: (i) van de Graaf

${}^{16}O^{+1}$ in Quelle ⇝ $E_{kin}({}^{16}O^{+1}) = 10\,MV \cdot 2 \cdot e = 20\,MeV$ am Experiment

(ii) Tandem van de Graaf

${}^{16}O^{-}$ in Quelle → $E_{kin}({}^{16}O^{-})$ an Stripperfolie $= 10\,MV \cdot 1 \cdot e = 10\,MeV$

z.B. 7 Elektronen werden abgestreift

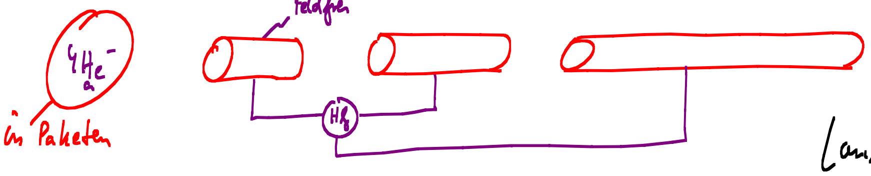
↳ an Stripperfolie $({}^{16}O^{6+})$ → $E_{kin}({}^{16}O^{6+}) = 10\,MV \cdot 6 \cdot e + 10\,MeV = 70\,MeV$

- beliebige Ionen können beschleunigt werden

ⓑ Hochfrequenzbeschleuniger

Grundidee: Multiplikation einer kleinen Potentialdifferenz

• Lineare HF-Beschl.



1. Takt	+	−	+
2. Takt	−	+	−
3. Takt	+	−	+

Laufzeit durch Rohrstück

$t_L \hat{=} \frac{1}{2} T$

Hochfrequenzperiode

Rohrstücke werden immer länger → Wideroe-Prinzip

• Kreisbeschleuniger

Bsp.: Zyklotron (Lawrence 1932)

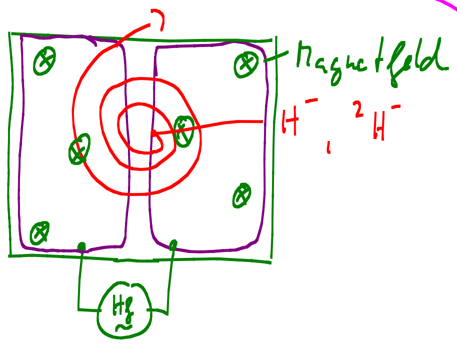
Geladenes Teilchen im Magnetfeld

→ Kreisbahn mit Kreisfrequenz ω

$$\frac{mv^2}{r} = evB \Leftrightarrow \frac{v}{r} = \omega = \frac{e}{m} B$$

unabhängig vom Radius

$m(H^-)$



5. Das Schalenmodell

- Masse ⤳ geschmeidige Abhängigkeit mit A, Z, N
- Radius ⤳ $r \approx 1{,}2\,\text{fm}\ A^{1/3}$ Abb. 5.1

Abweichungen von stetigem Verhalten: $Z = 50, 82, 20, 28, 8, 2$ Abb. 5.2, 5.3, 5.4, 5.5

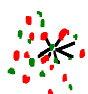
$N = 50, 82, 126, 28, 20, 8, 2$

Magische Zahlen: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126

⤳ „Schalen" auch im Atomkern?

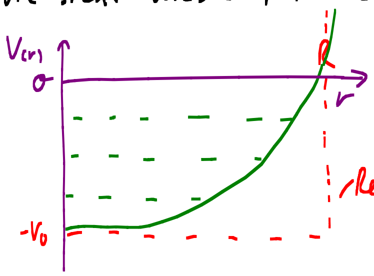
5.1 Das mittlere Kernpotenzial

Beim Atom: Elektronen bewegen sich im Coulombpotential des Atomkerns.



Nukleonen (Protonen und Neutronen) bewegen sich in einem mittleren Potential, dass durch die anderen Nukleonen geschaffen wird. „effektives Potential"

- Wie sieht dieses Potential aus?



harmonischer Oszillator $V(r) = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 - V_0$

Rechteckpotential $V(r) = \begin{cases} \infty & r \geq R \\ -V_0 & r < R \end{cases}$

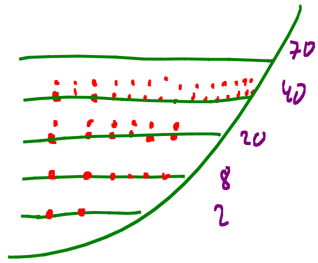
⇝ Schrödingergleichung einsetzen

(i) harm. Oszillator

$E = \hbar\omega \left(n' + \frac{3}{2}\right) \qquad n' = 2\cdot(n-1) + \ell \qquad n = 1, 2, 3, \dots \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$

n'	$E_{n'}$	ℓ	# m	# Nukleonen
0	$\frac{3}{2}\hbar\omega$	0	1	2
1	$\frac{5}{2}\hbar\omega$	1	3	6
2	$\frac{7}{2}\hbar\omega$	0, 2	1+5=6	12
3	$\frac{9}{2}\hbar\omega$	1, 3	3+7=10	20
4	$\frac{11}{2}\hbar\omega$	0, 2, 4	15	30

äquidistant



2, 8, 20, 28, 50

$\ell = 0 \qquad m = 0$

$\ell = 1 \qquad \ell_z = m = -1, 0, 1$

$\ell = 2 \qquad m = -2, -1, 0, 1, 2$

$\cdot 2$ für Spin up ⇑ oder Spin down ⇓

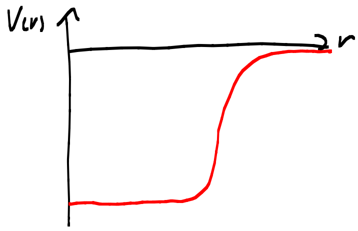
(ii) Rechteckpotential

⇝ 2, 8, 18, 20, 34, 40, 58

(iii) Woods-Saxon-Potential (Fermi-Potential)

$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)}$$

Abb. 5.6



5.2 Die Spin-Bahn-Wechselwirkung

1949: WW zwischen Spin s und Bahndrehimpuls ℓ der Nukleonen spielt wichtige Rolle

(Atom ≙ Feinstruktur)

Maria Goeppert-Mayer
Johannes Jensen } 1963 Nobelpreis

$$V_{\text{Schalenmodell}}(r, \vec{\ell}, \vec{s}) = V(r) + \underline{V_{\ell s}\,(\vec{\ell}\cdot\vec{s})}$$

$$V_{SM} = \begin{cases} V(r) + \frac{1}{2} V_{\ell s} \cdot \ell & \text{für } s = +\frac{1}{2} \\ V(r) - \frac{1}{2} V_{\ell s} \cdot (\ell + 1) & \text{für } s = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Zustände mit $j = l + \frac{1}{2}$ werden nach unten geschoben (l & spin stehen parallel)

" " $j = l - \frac{1}{2}$ " " oben "

Abb. 5.7

Aufspaltung Fermi-Potential mit Spin-Bahn

$$\Delta E \propto \left(l + \tfrac{1}{2}\right)$$

l =	0	1	2	3	4
	s	p	d	f	g

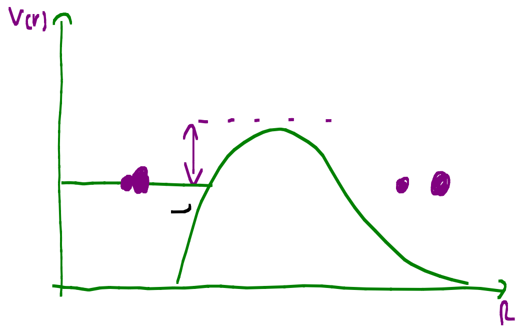
- Doppeltmagische Kerne (N, Z magisch)

  ${}^{4}_{2}He_{2}$, ${}^{16}_{8}O_{8}$, ${}^{40}_{20}Ca_{20}$, ${}^{48}_{20}Ca_{28}$, ${}^{208}_{82}Pb_{126}$ (stabile)

  ${}^{56}_{28}Ni_{28}$, ${}^{100}_{50}Sn_{50}$, $126\ X$ (superschwere Kerne) (instabile)

- Halbmagische Kerne (N oder Z magisch)

6. Energie aus Kernspaltung



ⓐ Spaltfragmente sind asymmetrisch

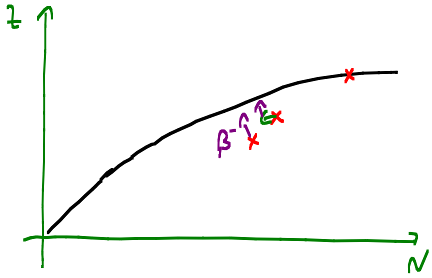
verteilt um $M/2$. Typisch:

$$^{235}U + n \rightarrow {}^{93}Rb + {}^{141}Cs + 2n$$

ⓑ Neutronenemission

Spaltfragmente sind sehr Neutronenreich, können Neutronen abdampfen ⇝ 2-3 prompte Neutronen

↓ nach 10^{-20} sec



$E_{kin}(n) \sim 1$ MeV

Anzahl ~ 2,5 in ^{235}U

Vereinzelte Neutronen kommen verzögert aus den Spaltprodukten ⇝ verzögerte Neutronen — nach sec

ⓒ Neutroneninduzierte Spaltung

Die Überwindung der Spaltbarriere benötigt Energie

$$^{235}U + n \rightarrow {}^{236}U + 6{,}5 \text{ MeV}$$

↑ thermisches Neutron, $E_{kin} \sim \frac{1}{40}$ eV

↑ reicht um Spaltbarriere zu überwinden } → Spaltung

dagegen: $^{238}U + n \rightarrow {}^{239}U + 4{,}2$ MeV

< Spaltbarriere

ⓓ Wirkungsquerschnitt für neutroneninduzierte Spaltung

- sehr hoch für thermische Neutronen ($\frac{1}{40}$ eV) an ^{235}U

⑥ Kettenreaktion – Kritikalität

$^{235}U\,(n,\text{fission})$ entstehen im Mittel 2,47 Neutronen

→ Kettenreaktion möglich

In Realität: Neutronen - Reproduktionsfaktor k

$k < 1$: subkritisch, Kettenreaktion bricht ab.

$k \overset{\frown}{=} 1$: kritisch

$k > 1$: überkritisch, explosives Szenario (Zeitskala $\sim 1\,ms$)

Natururan: 99,28 % ^{238}U 0,72 % ^{235}U

↝ Man muss ^{235}U anreichern < Ultrazentrifugen / Gasdiffusion

⑦ Kontrollierte Kernspaltung ($k=1$)

Neutronenergie zu hoch → MODERIERUNG durch Stöße (mit mgl. gleichschweren Partner)

↝ $^1_1H_1$, $^2_1H_1$, C ⇒ • Wasser
• Kohlenstoff

- Wie kann man Kritikalität steuern?
  - $k > 1$ → Temperatur steigt → Dichte von Wasser nimmt ab
    ↳ schlechte Moderation → k sinkt
    (automatische Regelung, braucht aber Zeit)
  - Steuerstäbe aus Bor, Cadmium, diese fangen mit (n,γ)-Reaktionen Neutronen ein. (zu langsam)
  - Fahre KKW nur mit verzögerten Neutronen ($t \sim 6\,sec$) von $k<1$ auf $k=1$.
- Reaktor: Anreicherung ^{235}U: 2-3 % (LEU)

Bombe erheblich mehr manche 10 % (HEU)

Siedewasser-/Druckwasser KKW