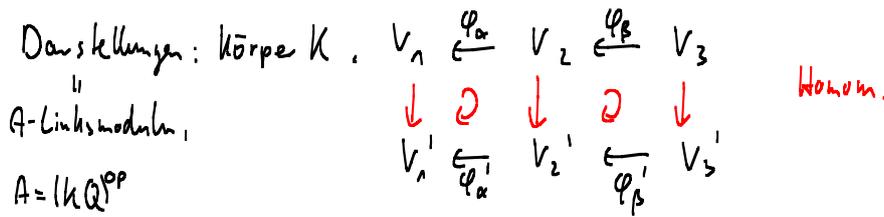


Wiederholung Darstellungstheorie

Bsp.: $Q = 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$



$$A \cong \begin{pmatrix} K & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \alpha & \alpha\beta \\ 0 & e_2 & \beta \\ 0 & 0 & e_3 \end{pmatrix}$$

Darstellung $(V_i, \varphi_\alpha) \mapsto V := \bigoplus_{i \in Q_0} V_i$ - A -Linksmodul
 $e_i = e_i^2$ Weg der Länge 0 am Punkt: $V_i = e_i \cdot V$

• einfache Darstellungen: $S_1 = K \leftarrow 0 \leftarrow 0$, $S_2 = 0 \leftarrow K \leftarrow 0$, $S_3 = 0 \leftarrow 0 \leftarrow K$

$A \rightsquigarrow \text{rad } A$, $\bar{A} = A/\text{rad } A$, einfache A -Moduln = einfache \bar{A} -Moduln

S einfach: $\text{rad}(S) = \text{rad } A \cdot S = 0 \Rightarrow S$ ist $A/\text{rad } A$ -Modul

$\text{rad } A$ = größtes nilpotente zweiseitige Ideal = \bigcap max. Linksideale

$$\begin{pmatrix} 0 & K & K \\ 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rad } A, \text{rad}(KQ)^{\text{op}} \neq \text{Weg der Länge } 0$$

$\{LK \text{ der Wege der Länge } \geq 1\} = \langle \alpha, \beta, \alpha\beta \rangle$

$$\bar{A} = A/\text{rad } A = \begin{pmatrix} K & & \\ & K & \\ & & K \end{pmatrix} = \begin{matrix} K_{e_1} & K_{e_2} & K_{e_3} \\ K & \oplus & K & \oplus & K \\ & & & & K \end{matrix} \Rightarrow 3 \text{ einfache, jeweils 1-dim.}$$

Artin-Wedderburn: \bar{A} halbeinfach ($\text{rad } \bar{A} = 0$, $\bar{A} = \bigoplus$ einf.)

$$\Rightarrow \bar{A} = \bigoplus \text{Mat}(n_i \times n_i, D_i) \quad D_i \supset K \text{ Schiefkörper}$$

" $\text{End}(S_i)^{\text{op}}$, S_i einfach (Schur's Lemma)

einfache \bar{A} -Moduln: Zu jeder Komponente $\text{Mat}(n_i \times n_i, D_i)$ eine Isom.-klasse (z.B. 1. Spalte $\begin{pmatrix} D_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$)

$$\text{Hom}_A(A, M) \cong M \text{ (Modul)}$$

$$\text{Hom}_A(A, S) \cong S \text{ einfach} \Rightarrow \exists f: A \xrightarrow{\neq 0} S \rightarrow 0 \text{ surjektiv}$$

jeder einfache ist Quotient von A , sogar von \bar{A} ($\text{rad } A \cdot S = 0$)

• $A = \bigoplus$ unzerlegbare A -Moduln (Kronecker-Remak-Schmidt: eindeutig)

$$1_A \uparrow = \sum_{i=1}^n e_i, \text{ primitive, paarweise orthogonale Idempotente, } e_i^2 = e_i, e_i e_j = 0 \text{ (} i \neq j \text{)}$$

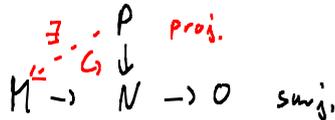
$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \bigoplus \text{Mat}(n_i \times n_i, D_i)$$

K unzerlegbar $\Rightarrow e_i$ primitiv

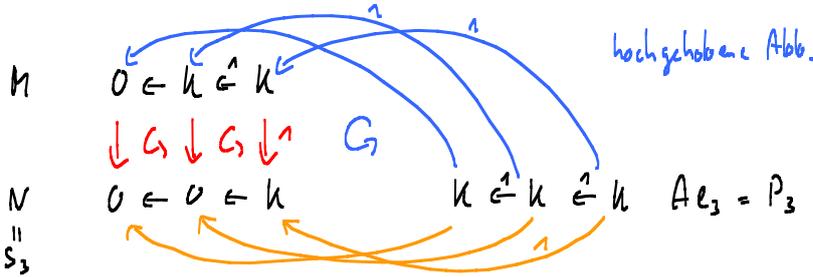
$${}_A A = A e_1 \oplus A e_2 \oplus A e_3 = \begin{pmatrix} K & & \\ 0 & & \\ 0 & & \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} K & \\ & K \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} K & \\ & K \end{pmatrix} \text{ unzerlegbar projektiv}$$

$S_i = Ae_i / \text{rad } Ae_i$ (S_i einfach $\Leftrightarrow Ae_i$ unz. projektiv)

Hochhebungseigenschaft:



$Ae_1 = K \leftarrow 0 \leftarrow 0$, $Ae_2 = K \leftarrow K \leftarrow 0$, $Ae_3 = K \leftarrow K \leftarrow K$ (Weg von 3 weg als Basis)



$M = M_n \supset M_{n-1} \supset \dots \supset M_1 \supset 0$ mit M_{i+1}/M_i einfach, Kompositionsreihe (Jordan-Hölder-Reihe)



$Ae_3 = P_3$
 $0 \leftarrow 0 \leftarrow K = S_3$
 $0 \leftarrow K \leftarrow 0 = S_2$
 $K \leftarrow 0 \leftarrow 0 = S_1$

J.-H.-Faktoren S_3, S_2, S_1 jew. $1 \times$.

$\dim V = (\dim V_i)_{i \in \mathcal{A}_0} = (\text{J.-H.-Faktoren})$

$\dim P_3 = (1, 1, 1)$

in Allg. Modul dadurch nicht bestimmt, aber:

Manz. Darst. von \mathcal{Q} Dynkin $\Rightarrow \dim M$ bestimmt $M \perp$

$A = \bigoplus A_i$ Zerlegung in Ideale, die Teileralgebren mit 1 sind.

$1 = \sum_{i=1}^n e_i$ zentral-primitive orth. Idempotente. $Z(A) = \{z \in A : za = az \ \forall a \in A\}$

$(kQ)^{op} : z \in A : z = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 \alpha + \lambda_5 \beta + \lambda_6 \alpha\beta$

$e_1 z = z e_1$ $e_2 z = \lambda_1 e_1 + \lambda_4 \alpha + \lambda_6 \alpha\beta$

$z e_1 = \lambda_1 e_1 \Rightarrow \lambda_4 = \lambda_6 = 0, \lambda_5 = 0$

$\alpha \cdot \beta \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \Rightarrow z = \lambda \cdot 1 \Rightarrow 1$ zentral primitiv $\Rightarrow A$ unzerlegbar

($\Leftrightarrow \mathcal{Q}$ zusammenhängend)

bestimme unzerlegbare A -Moduln = unz. kQ -Darstellungen

$\mathcal{Q} = 1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$ Dynkin Typ $A_3 : 0 - 0 - 0$ Satz von Gabriel: endliche Darstellungstyp

Kombinatorisch: $\dim M$ bestimmt M unz. eindeutig

positive Wurzeln von \mathfrak{g}

$q(x) = \sum_{i \in \mathcal{Q}_0} x_i^2 - \sum_{i,j \in \mathcal{Q}_0} \underset{\# \text{ Kanten } i-j}{d_{ij}} x_i x_j = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 - x_2 x_3$ $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{matrix}$ (Dynkin) positiv definit

X mit $q(x) = 1 : 100, 010, 001, 110, 011, 111 \Rightarrow 6$ unz. Darstellungen / \approx

bestimme alle unz. Darstellungen algorithmisch

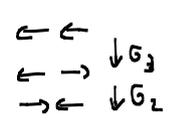
zulässige Anordnung G_3 $\left\{ \begin{array}{l} 1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 : 1 \text{ Senke} \\ \downarrow G_1 \\ 1 \rightarrow 2 \leftarrow 3 : 2 \text{ Senke} \\ \downarrow G_2 \\ 1 \leftarrow 2 \rightarrow 3 : 3 \text{ Senke} \end{array} \right.$

8.19: projektive $P(i) = S_n^- \dots S_{i-1}^- (S(i))$ einfach für $G_1, \dots, G_n \vec{e}$

8.7: $X \cong (S_{i_1}^- \dots S_{i_n}^-)^r S_{i_1}^- \dots S_{i_n}^- (S(i_s))$ liefert alle unz. X für $r \in \mathbb{N}$, $S \in \{1, \dots, n\}$
 Algorithmus bricht ab (A Dynkin)

$P(1) = S(1)$ projektiv

$P(2) = S_n^- S(2) : \mathbb{O} \rightarrow K \leftarrow 0$
 $K \leftarrow K \leftarrow 0$
 Kern $(0 \rightarrow K)$



$P(3) = S_n^- S_2^- S(3) : \mathbb{O} \leftarrow \mathbb{O} \rightarrow K$
 $K \leftarrow K \leftarrow K$
 Kern $(0 \rightarrow 0 \oplus K)$
 Kern $(0 \rightarrow K)$

8.19 \Rightarrow 3 unz. proj. \checkmark

8.7.: Iteriere $(S_n^- S_2^- S_3^-)$, Anfang: proj. unz.

$P(1) : K \leftarrow 0 \leftarrow \mathbb{O} \xrightarrow{S_3^-} K \leftarrow 0 \rightarrow 0 \xrightarrow{S_2^-} K \rightarrow K \leftarrow 0 \xrightarrow{S_1^-} \mathbb{O} \leftarrow K \leftarrow 0$
 $P(2) : K \leftarrow K \leftarrow \mathbb{O} \xrightarrow{S_3^-} K \leftarrow K \rightarrow K \xrightarrow{S_2^-} K \rightarrow K \leftarrow K \xrightarrow{S_1^-} \mathbb{O} \leftarrow K \leftarrow K$
 $P(3) : K \leftarrow K \leftarrow K \xrightarrow{S_3^-} K \leftarrow K \rightarrow 0 \xrightarrow{S_2^-} K \rightarrow 0 \leftarrow 0 \xrightarrow{S_1^-} \mathbb{O} \leftarrow 0 \leftarrow 0$
 $\hat{=} I(1)$ injektiv

nächste Iteration:

$\mathbb{O} \leftarrow K \leftarrow \mathbb{O} \xrightarrow{S_3^-} \mathbb{O} \leftarrow K \rightarrow K \xrightarrow{S_2^-} \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{O} \leftarrow K \xrightarrow{S_1^-} \mathbb{O} \leftarrow \mathbb{O} \leftarrow K$
 $\mathbb{O} \leftarrow K \leftarrow K \xrightarrow{S_3^-} \mathbb{O} \leftarrow K \rightarrow 0 \xrightarrow{S_2^-} \mathbb{O} \rightarrow 0 \leftarrow 0 \xrightarrow{S_1^-} \mathbb{O} \leftarrow 0 \leftarrow 0$
 $\hat{=} I(2)$ injektiv
 $\mathbb{O} \leftarrow 0 \leftarrow K \xrightarrow{S_3^-} \mathbb{O} \leftarrow \mathbb{O} \rightarrow 0 \xrightarrow{S_2^-} \mathbb{O} \rightarrow 0 \leftarrow 0 \xrightarrow{S_1^-} \mathbb{O} \leftarrow 0 \leftarrow 0$

\Rightarrow Damit alle unz. Darstellungen bestimmt.