Wiederholung Darstellungstheorie

Bsp.: $Q = 1 \xleftarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3$

Darstellungen: Körper K,
$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[d] & V_2 \arrow[l, "\varphi_\alpha"'] \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] & V_3 \arrow[l, "\varphi_\beta"'] \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ V_1' & V_2' \arrow[l, "\varphi_\alpha'"] & V_3' \arrow[l, "\varphi_\beta'"] \end{tikzcd}$$
Homom.

$\shortparallel$

A-Linksmoduln, $A = (KQ)^{op}$

$$A \simeq \begin{pmatrix} K & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \alpha & \alpha\beta \\ 0 & e_2 & \beta \\ 0 & 0 & e_3 \end{pmatrix}$$

Darstellung $(V_i, \varphi_\alpha) \mapsto V := \bigoplus_{i \in Q_0} V_i$ - A-Linksmodul

$e_i = e_i^2$ Weg der Länge 0 am Punkt i: $V_i := e_i V$

- einfache Darstellungen: $S_1 = K \leftarrow 0 \leftarrow 0$, $S_2 = 0 \leftarrow K \leftarrow 0$, $S_3 = 0 \leftarrow 0 \leftarrow K$

$A \supseteq \operatorname{rad} A$, $\bar{A} = A/\operatorname{rad} A$, einfache A-Moduln = einfache $\bar{A}$-Moduln

S einfach: $\operatorname{rad}(S) = \operatorname{rad} A \cdot S = 0 \Rightarrow S$ ist $A/\operatorname{rad} A$ - Modul

$\operatorname{rad} A$ = größte nilpotente zweiseitige Ideal = $\bigcap$ max. Linksideale

$\begin{pmatrix} 0 & K & K \\ 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rad} A$, $\operatorname{rad} (KQ)^{op} \not\ni$ Wege der Länge 0

$\shortparallel$ $\{LK$ der Wege der Länge $\geq 1\} = \langle \alpha, \beta, \alpha\beta \rangle$

$$\bar{A} = A/\operatorname{rad} A = \begin{pmatrix} K & & \\ & K & \\ & & K \end{pmatrix} = \overset{Ke_1}{\underset{(K)_{1\times 1}}{K}} \oplus \overset{Ke_2}{K} \oplus \overset{Ke_3}{K} \Rightarrow 3 \text{ einfache, jeweils 1-dim.}$$

Artin-Wedderburn: $\bar{A}$ halbeinfach ($\operatorname{rad} \bar{A} = 0$, ${}_{\bar{A}}\bar{A} = \bigoplus$ einf.)

$\Rightarrow \bar{A} = \bigoplus \operatorname{Mat}(n_i \times n_i, D_i)$ $\quad D_i \supseteq K$ Schiefkörper

$D_i = \operatorname{End}(S_i)^{op}$, S_i einfach (Schur's Lemma)

einfache $\bar{A}$-Moduln: Zu jeder Komponente $\operatorname{Mat}(n_i \times n_i, D_i)$ eine Isom.-klasse (z.B. 1. Spalte $\begin{pmatrix} D_i \\ \vdots \\ D_i \end{pmatrix}$)

$\operatorname{Hom}_A(A, M) \simeq M$ (Modul)

$\operatorname{Hom}_A(A, S) \simeq S$ einfach $\Rightarrow \exists f: A \xrightarrow{\neq 0} S \to 0$ surjektiv

jeder einfache ist Quotient von A, sogar von $\bar{A}$ ($\operatorname{rad} A \cdot S = 0$)

- ${}_A A = \bigoplus$ unz. A-Moduln (Krull-Remak-Schmidt: eindeutig)

$\updownarrow$

$1_A = \sum_{i=1}^n e_i$, primitive, paarweise orthogonale Idempotente, $e_i^2 = e_i$, $e_i e_j = 0$ $(i \neq j)$

$\updownarrow$

$\bar{A} = \bigoplus \operatorname{Mat}(n_i \times n_i, D_i)$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

unzerlegbar $\Rightarrow e_i$ primitiv

$${}_A A = Ae_1 \oplus Ae_2 \oplus Ae_3 = \overset{S_1}{\begin{pmatrix} K \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \oplus \begin{pmatrix} K \\ K \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} K \\ K \\ K \end{pmatrix} \quad \text{unzerlegbar projektiv}$$

$S_i = Ae_i / \operatorname{rad} Ae_i$ $\quad$ (S_i einfach $\leftrightarrow$ Ae_i unz. projektiv)

Hochhebungseigenschaft:

$$\begin{tikzcd} & & P \arrow[d] \arrow[dll, dashed, "\exists"'] & \text{proj.} \\ M \arrow[rr] & & N \arrow[r] & 0 \quad \text{surj.} \end{tikzcd}$$

$Ae_1 = k \leftarrow 0 \leftarrow 0$, $Ae_2 = k \leftarrow k \leftarrow 0$, $Ae_3 = k \leftarrow k \leftarrow k$ (Wege von 3 weg als Basis)

$$\begin{tikzcd} M & 0 \arrow[d] & k \arrow[l] \arrow[d] & k \arrow[l, "1"'] \arrow[d, "1"] \\ N \arrow[d, equal] & 0 & 0 \arrow[l] & k \arrow[l] & & k & k \arrow[l, "1"'] & k \arrow[l, "1"'] & Ae_3 = P_3 \\ S_3 \end{tikzcd}$$

hochgeschobene Abb.

$M = M_n \supset M_{n-1} \supset \ldots \supset M_1 \supset 0$ mit M_{i+1}/M_i einfach, Kompositionsreihe (Jordan-Hölder-Reihe)

$$\begin{tikzcd} k & k \arrow[l] & k \arrow[l] \\ k \arrow[u] & k \arrow[l] \arrow[u] & 0 \arrow[l] \arrow[u] \\ k \arrow[u] & 0 \arrow[l] \arrow[u] & 0 \arrow[l] \arrow[u] \\ 0 \arrow[u] & 0 \arrow[l] \arrow[u] & 0 \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$Ae_3 = P_3$

$0 \leftarrow 0 \leftarrow k = S_3$

$0 \leftarrow k \leftarrow 0 = S_2$

$k \leftarrow 0 \leftarrow 0 = S_1$

: J.-H.-Faktoren S_3, S_2, S_1 jew. 1x.

$\underline{\dim} V = (\dim V_i)_{i \in Q_0} = (\text{J.-H.-Faktoren})$

$\underline{\dim} P_3 = (1,1,1)$

⌜ im Allg. Modul dadurch nicht bestimmt, aber:

M unz. Darst. von Q Dynkin $\Rightarrow \underline{\dim} M$ bestimmt M ⌟

- $A = \bigoplus A_i$ Zerlegung in Ideale, die Teilalgebren mit 1 sind.
  $\Updownarrow$
  $1 = \sum_{i=1}^{n} z_i$ $\quad$ zentral-primitive orth. Idempotente . $Z(A) = \{ z \in A : za = az \ \forall a \in A \}$

$(kQ)^{op}$: $z \in A$: $z = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 \alpha + \lambda_5 \beta + \lambda_6 \alpha\beta$

$e_1 z = z e_1$ $\qquad$ $e_1 z = \lambda_1 e_1 + \lambda_4 \alpha + \lambda_6 \alpha\beta$

$z e_1 = \lambda_1 e_1 \Rightarrow \lambda_4 = \lambda_6 = 0$, $\lambda_5 = 0$

$\alpha, \beta \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \Rightarrow z = \lambda \cdot 1 \Rightarrow 1$ zentral primitiv $\Rightarrow A$ unzerlegbar

($\Leftarrow$ Q zusammenhängend)

- bestimme unzerlegbare A-Moduln = unz. kQ-Darstellungen

$Q = 1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$ $\qquad$ Dynkin Typ A_3 : $\circ - \circ - \circ$ Satz von Gabriel : endlicher Darstellungstyp

Kombinatorisch : $\underline{\dim} M$ bestimmt M unz. eindeutig
$\qquad\qquad\qquad \|$
$\qquad\qquad$ positive Wurzeln von q

$q(x) = \sum_{i \in Q_0} x_i^2 - \sum_{i \leq j} d_{ij} \, x_i x_j = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 - x_2 x_3$ $\qquad \overset{1}{\circ} - \overset{2}{\circ} - \overset{3}{\circ}$ $\quad$ ($\Updownarrow$ Dynkin)

d_{ij} = # Kanten $i - j$

$= \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - x_3)^2 + \frac{1}{2} x_3^2$ positiv definit

X mit $q(x) = 1$: $100, 010, 001, 110, 011, 111 \Rightarrow 6$ unz. Darstellungen $/\simeq$

bestimme alle unz. Darstellungen algorithmisch zulässige Anordnung

$$G_3 \left(\begin{array}{l} 1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \; : \; 1 \text{ Senke} \\ \quad \downarrow G_1 \\ 1 \rightarrow 2 \leftarrow 3 \; : \; 2 \text{ Senke} \\ \quad \downarrow G_2 \\ 1 \leftarrow 2 \rightarrow 3 \; : \; 3 \text{ Senke} \end{array} \right.$$

8.19 : projektive $P(i) = S_1^- \cdots S_{i-1}^- \left(S(i) \right)$ einfach für $G_i \dots G_n \vec{Q}$

8.7 : $X \cong (S_{i_1}^- \dots S_{i_n}^-)^r \underbrace{S_{i_1}^- \dots S_{i_{s-1}}^- \left(S(i_s) \right)}_{P(i_s)}$ liefert alle unz. X für $r \in \mathbb{N}$, $s \in \{1, \dots, n\}$

Algorithmus bricht ab (Q Dynkin)

$\boxed{P(1) = S(1)}$ projektiv

$P(2) = S_1^- \, S(2) : \; \hat{0} \rightarrow k \leftarrow 0$

$\boxed{k \leftarrow k \leftarrow 0}$

$= \operatorname{Cokern}(0 \rightarrow k)$

$\leftarrow \leftarrow$ $\downarrow G_3$
$\leftarrow \rightarrow$
$\rightarrow \leftarrow$ $\downarrow G_2$

$P(3) = S_1^- \, S_2^- \, S(3) : \; 0 \leftarrow \hat{0}^2 \rightarrow k$

$\downarrow S_2^-$ $\operatorname{Cokern}(0 \rightarrow 0 \oplus k)$

$\hat{0} \rightarrow k \xleftarrow{1} k$

$\operatorname{Cokern}(0 \rightarrow k)$ $\downarrow S_1^-$

$k \xleftarrow{1} k \xleftarrow{1} k$

$= \boxed{k \leftarrow k \leftarrow k}$

8.19 $\Rightarrow$ 3 unz. proj. ✓

8.7.: Iteriere $(S_1^- S_2^- S_3^-)$, Anfang: proj. unz.

$P(1): \; k \leftarrow 0 \leftarrow \boxed{0} \overset{S_3^-}{\rightsquigarrow} k \leftarrow \boxed{0} \rightarrow 0 \overset{S_2^-}{\rightsquigarrow} \boxed{k} \rightarrow k \leftarrow 0 \overset{S_1^-}{\rightsquigarrow} \boxed{0 \leftarrow k \leftarrow 0}$

$P(2): \; k \leftarrow k \leftarrow \boxed{0} \overset{S_3^-}{\rightsquigarrow} k \leftarrow \boxed{k} \rightarrow k \overset{S_2^-}{\rightsquigarrow} \boxed{k} \rightarrow k \leftarrow k \overset{S_1^-}{\rightsquigarrow} \boxed{0 \leftarrow k \leftarrow k}$

$P(3): \; \boxed{k} \leftarrow k \leftarrow \boxed{k} \overset{S_3^-}{\rightsquigarrow} k \leftarrow \boxed{k} \rightarrow 0 \overset{S_2^-}{\rightsquigarrow} \boxed{k} \rightarrow 0 \leftarrow 0 \overset{S_1^-}{\rightsquigarrow} \boxed{0 \leftarrow 0 \leftarrow 0}$

$= I(1)$ injektiv

nächste Iteration:

$0 \leftarrow k \leftarrow \boxed{0} \overset{S_3^-}{\rightsquigarrow} 0 \leftarrow \boxed{k} \rightarrow k \overset{S_2^-}{\rightsquigarrow} \boxed{0} \rightarrow 0 \leftarrow k \overset{S_1^-}{\rightsquigarrow} \boxed{0 \leftarrow 0 \leftarrow k}$

$0 \leftarrow k \leftarrow \boxed{k} \overset{S_3^-}{\rightsquigarrow} 0 \leftarrow \boxed{k} \rightarrow 0 \overset{S_2^-}{\rightsquigarrow} \boxed{0} \rightarrow 0 \leftarrow 0 \overset{S_1^-}{\rightsquigarrow} \boxed{0 \leftarrow 0 \leftarrow 0}$

$= I(2)$ injektiv

$0 \leftarrow 0 \leftarrow \boxed{k} \overset{S_3^-}{\rightsquigarrow} 0 \leftarrow \boxed{0} \rightarrow 0 \overset{S_2^-}{\rightsquigarrow} \boxed{0} \rightarrow 0 \leftarrow 0 \overset{S_1^-}{\rightsquigarrow} \boxed{0 \leftarrow 0 \leftarrow 0}$

$\Rightarrow$ Damit alle unz. Darstellungen bestimmt.