Wiederholung klausurrelevanter Stoff

Einführung in die Stochastik:
Wahrscheinlichkeitstheorie
Statistik

II. Kombinatorik

A. Permutationen   Sei $k \in \{1, \dots, n\}$

Anzahl der k-Tupel aus versch. Zahlen $1 \dots n$

- Mögl. k unterschiedliche Kugeln auf n Fächer ohne Mehrfachbelegung
- Mögl. k Kugeln ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge
- injektiven Abb. $\{1 .. k\} \to \{1 .. n\}$

$$(n)_k = n(n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

B. Kombinationen   Sei $k \in \{0, \dots, n\}$

Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$

- Möglichkeiten, k ununterscheidbare Kugeln auf n Fächer ohne Mehrfachbeleg.
- Möglichkeiten, k Kugeln ohne Zurücklegen ohne Beachtung d. Reihenfolge
- Abb. $f: \{1 .. n\} \to \{0, 1\}$, $|f^{-1}(1)| = k$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n)_k}{k!}$$

C. Variationen   Sei $k \in \mathbb{N}$

Anzahl der k-Tupel aus Zahlen $1 \dots n$

- Mögl., k unterscheidbare Kugeln auf n Fächer mit Mehrfachbelegung
- Mögl., k Kugeln mit Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge

n^k

III. Einschluss-Ausschluss-Formel

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i \neq j \neq k} |A_i \cap A_j \cap A_k| \dots (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|$$

speziell $\left|\bigcap_{j=1}^{m} A_{i_j}\right| = c(m)$, dann

$$\left|\bigcup A_i\right| = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \binom{n}{m} c(m)$$

Hypergeometrische Verteilung

Los der Größe N mit K defekten Stücken

WS. dass in Stichprobe n genau k defekte Stücke sind

$$H_{N,K,n}\{k\} = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad \min\{0; (K-N+n)\} \le k \le \max\{n, K\}$$

IV. Gekoppelte Experimente

// für diskrete Grundräume

$$p(\omega_1, \dots, \omega_n) = p_1(\omega_1)\, p_2(\omega_2 | \omega_1) \dots p_n(\omega_n | \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{n-1})$$

V. Bedingte Wahrscheinlichkeit

Def.: $P(B|A) = \frac{P\, B \cap A}{PA}$, $A, B \in \mathfrak{F}$, $PA > 0$

totale WS. $\Omega = \sum_{k=1}^{n} A_k$, $PA_k > 0$, Dann

$$PB = \sum PB \cap A_k = \sum P(B|A_k)\, PA_k$$

Bayes-Regel $P(A_m|B) = \frac{P(B|A_m)\, PA_m}{PB} = \frac{P(B|A_m)\, PA_m}{\sum P(B|A_k)\, PA_k}$

VI. Unabhängigkeit

Def.: $A, B \in \mathfrak{F}$ unabh., wenn $PA \cap B = PA \cdot PB$

äquiv. $P(A|B) = P(A|B^c)$, äquiv. $P(A|B) = PA$

Def.: $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{F}$ unabh., wenn $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m}) = \prod_{j=1}^{m} PA_{i_j}$

für alle $\{i_1, \dots, i_m\} \subset \{1 \dots n\}$

VIII. Kolmogorov-Axiome

$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$

$\mathfrak{F}$ heißt σ-Algebra, wenn $\Omega \in \mathfrak{F}$, $A \in \mathfrak{F} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{F}$, $A_i \in \mathfrak{F} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{F}$

P W-Maß, wenn $PA \ge 0$, $P\Omega = 1$, $\underbrace{A_i \in \mathfrak{F}}_{\text{disjunkt}} \Rightarrow P \sum A_i = \sum PA_i$

IX. Lebesgue-Integral

Def.: $X: (\Omega, \mathfrak{F}) \to (\Omega', \mathfrak{F}')$ messbar, wenn $X^{-1} A' = \{\omega : X(\omega) \in A'\} \in \mathfrak{F}$ für $A' \in \mathfrak{F}'$

Def.: $X = \mathbb{1}_A$: $\int \mathbb{1}_A \, dP = PA$

$X = \sum a_i \mathbb{1}_{A_i}$: $\int X \, dP = \sum a_i PA_i$

$X \ge 0$ messbar $\int X dP = \sup \int X_n dP$, $X_n \uparrow X$, X_n Treppen

X messbar : $\int X dP = \int X^+ dP - \int X^- dP$

$P^X A' = P(X^{-1}A')$, $\int Y \, dP^X = \int Y \circ X \, dP$

Mittelwert von P: $\int x \, P(dx)$

Erwartungswert von X: $\int y \, P^X(dy) = \int X \, dP$ // $Y = id$

XI. Diskrete Verteilungen

X gleichverteilt auf $\{a_1 \dots a_n\}$, wenn $P(X = a_i) = \frac{1}{n}$

$X \sim B_{1,p}$, wenn $P(X=1) = p = 1 - P(X=0)$

$X \sim B_{n,p}$, wenn $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0 \dots n$

$X \sim G_p$, wenn $P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$, $k = 1, 2 \dots$

$X \sim B^-_{n,p}$, wenn $P(X=k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$, $k = n, n+1 \dots$

$X \sim P_\lambda$, wenn $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, \dots$

Die n-Faltung von $B_{1,p}$ ist $B_{n,p}$, die von G_p ist $B^-_{n,p}$

XII. Stetige W-Maße

$p : \mathbb{R}^m \to [0, \infty)$ messbar , $\int p \, d\lambda_m = 1$, Dichte

zugehörig: $PA = \int_A p \, d\lambda_m$

U_A Dichte $p(t) = \frac{1}{\lambda_m A} \mathbb{1}_A(t)$

E_a Dichte $p(t) = \begin{cases} \frac{1}{a} e^{t/a} & , t > 0 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$

XIII. Transformationssätze

13.1 X Vf. F , $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton steigend, stetig, $T\mathbb{R} = (a,b)$

Dann hat $T \circ X$ Vf. $\begin{cases} F(T^{-1}(y)) & a < y < b \\ 0 & y \leq a \\ 1 & y \geq b \end{cases}$

13.2 X Dichte p , $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diff'bar , $T' \neq 0$, $T\mathbb{R} = (a,b)$

Dann hat $T \circ X$ Dichte $\begin{cases} \frac{p(T^{-1}(y))}{|T'(T^{-1}(y))|} & , a < y < b \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$

N_{μ,σ^2} Dichte $p(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$\Gamma_{a,b}$ Dichte $p(t) = \frac{1}{a^b \Gamma(b)} t^{b-1} e^{-t/a}$, $t > 0$

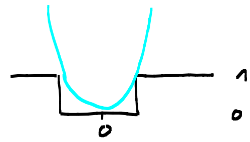
Faltung von $\Gamma_{a,b}$ und $\Gamma_{a,c}$ ist $\Gamma_{a,b+c}$

XIV. Gesetz der großen Zahl

$\mathrm{Var}\, X = E(X - EX)^2$

$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(X-EX)(Y-EY)$

Čebyšev: $P(|X - EX| > c) \le \dfrac{\mathrm{Var}\, X}{c^2}$



Gesetz der großen Zahl: $P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - EX_1\right| > \varepsilon\right) \le \dfrac{\mathrm{Var}\, X_1}{n\varepsilon^2}$ // $X_1 \dots X_n$ i.i.d.

XV. Zentraler Grenzwertsatz

$X_1, X_2 \dots$ unabhängig mit $EX_n = \mu$, $\mathrm{Var}\, X_n = \sigma^2$

Dann: $P(a < n^{-1/2} \sum (X_i - \mu) < b) \longrightarrow N_{0,\sigma^2}(a,b)$

XVI. Konvergenz in WS., schwache Konvergenz

Def.: $X_n \to X$ in WS., wenn $P(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0$, $\varepsilon > 0$

Def.: $X_n \Rightarrow X$, wenn $F_n(t) \longrightarrow F(t)$, falls F stetig in t // schwache Konvergenz

(insbesondere gilt: $\frac{1}{n}\sum X_i \to EX_1$ in WS.,
$n^{-1/2}\sum (X_i - \mu) \Rightarrow X \sim N_{0,\sigma^2}$)

16.5 $X_n \to c$ in WS., f stetig in c, dann $f(X_n) \to f(c)$ in WS.

16.6 $a_n(X_n - c) \Rightarrow Z$, $a_n \to \infty$, f diff'bar in c,
dann gilt: $a_n(f(X_n) - f(c)) \Rightarrow f'(c) Z$

XVII. Empirische Schätzer

$X_1, \dots, X_n$ i.i.d. und $h \in L_2(P)$

Def.: Der empirische Schätzer für $E_P h(X)$ ist $\mathbb{E}_n h = \frac{1}{n}\sum h(X_i)$

Es gilt: $E\, \mathbb{E}_n h = Eh(X)$, $\mathbb{E}_n h \to Eh(X)$ in WS.

$n^{1/2}(\mathbb{E}_n h - Eh) = n^{-1/2}\sum (h(X_i) - Eh) \Rightarrow N_{0, \mathrm{Var}\, h(X_1)}$

$X_1, \dots, X_n$ i.i.d. P_ϑ, $\vartheta \in \mathbb{R}$

$\hat{\vartheta}$ ist konsistent (für ϑ), wenn $\hat{\vartheta} \to \vartheta$ in WS. unter P_ϑ, $\vartheta \in \Theta$.

asymptotisch normal, wenn $n^{1/2}(\hat{\vartheta} - \vartheta) \Rightarrow X \sim N_{0,\sigma^2}$ unter P_ϑ, $\vartheta \in \Theta$.

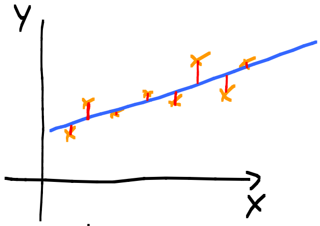
XVIII. Lineare Regression

$Y = a + b^T X + \varepsilon$, ε, X unabhängig

Beob. (X_i, Y_i) $i = 1 \dots n$, unabhängig

Der <u>kleinste-Quadrate-Schätzer</u> für a, b minimiert:

$$\sum (Y_i - (a + b^T X_i))^2$$



Die <u>Normalengleichungen</u> sind:

$$\sum (Y_i - a - b^T X_i) = 0$$

$$\sum X_i (Y_i - a - b^T X_i) = 0$$

// Ableitungen $= 0$
(konstante Faktoren und Vorzeichen sind unwichtig)

XIX. Kernschätzer

$X_1, X_2, \dots$ i.i.d. mit Dichte f stetig in x

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n} \sum K_{b_n}(x - X_i) \quad , K_b(t) = \frac{1}{b} K\left(\frac{t}{b}\right)$$

$$E(\hat{f}_n(x) - f(x))^2 = E(\hat{f}_n(x) - E\hat{f}_n(x))^2 + (E\hat{f}_n(x) - f(x))^2$$

$$= \operatorname{Var} \hat{f}_n(x) + \operatorname{Bias}^2 \hat{f}_n(x)$$

$\longrightarrow 0$ in W.S., wenn $b_n \to 0$, $n b_n \to \infty$

XX. Maximum-Likelihood-Schätzer

$X_1, \dots, X_n$ i.i.d. μ-Dichte f_ϑ, $\vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$

Wähle $\vartheta = \hat{\vartheta}$ so, dass $\vartheta \to \prod f_\vartheta(X_i)$ maximal

Häufig: $\sum \partial_{\vartheta = \hat{\vartheta}} \log f_\vartheta(X_i) = 0 = \sum \frac{f_\vartheta^{(\cdot)}}{f_\vartheta}(X_i)$

XXI. Tests

X verteilt wie P_ϑ, $\vartheta \in \Theta$, $H \subset \Theta$, $K \subset \Theta \setminus H$

<u>Def.</u>: $\varphi : \Omega \to [0,1]$ messbar heißt Test, $\varphi = 1_C$

<u>Def.</u>: φ hat Niveau α, wenn $E_\vartheta \varphi(X) \le \alpha$, $\vartheta \in H$

<u>Neyman-Pearson</u>:

P, Q, p, q μ-Dichten

$$\psi = \begin{cases} 1 & q > cp \\ a & q = cp \\ 0 & q < cp \end{cases}$$

a, c so, dass $E_P \psi(X) = \alpha$

Dann $E_Q \psi(X) \ge E_Q \varphi(X)$ für φ zum Niveau α

XXII. Exponentielle Familien, monotone Dichtequotienten, gleichmäßig beste Tests

<u>Def.</u>: P_ϑ, $\vartheta \in \Theta$, exponentielle Familie, wenn μ-Dichten

$$f_\vartheta(x) = c(\vartheta)\, g(x)\, e^{\eta(\vartheta)^T T(x)}$$

$X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $\quad \prod f_\vartheta(X_i) = c(\vartheta)^n \prod g(X_i)\, e^{\eta(\vartheta)^T \sum_{i=1}^n T(X_i)}$

<u>Def.</u>: P_ϑ, $\vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ monotone Dichtequotienten, wenn

$$\frac{f_\tau}{f_\vartheta} = H_{\vartheta\tau} \circ T \quad , \; H_{\vartheta,\tau} \text{ nichtfallend} \quad , \; \vartheta < \tau$$

<u>Def.:</u> Test ψ zum Niveau α heißt gleichmäßig bester Test, wenn

$E_\tau \psi(X) \ge E_\tau \varphi(X)$, $\tau \in K$, für jedes φ zum Niveau α.

<u>Satz:</u> Hat P_ϑ monotonen Dichtequotienten, so ist

$$\psi = \begin{cases} 1 & T > b \\ a & T = b \\ 0 & T < b \end{cases} \quad \text{mit } E_\vartheta \psi(X) = \alpha$$

gleichmäßig bester Test für $\tau \le \vartheta$ gegen $\tau > \vartheta$.

<u>Satz:</u> Sei P_ϑ, $\vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ expon. Fam. und η monoton, dann hat

P_ϑ monotonen Dichtequotienten in T (bzw. $-T$)

XXIII. Konfidenzbereiche

Sei X verteilt wie $P_\vartheta \mid \mathfrak{F}$, $\vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}$

Konfidenzbereich für ϑ ist eine Abb. $B : \Omega \to \mathfrak{P}(\mathbb{R})$

Er hat das Niveau (oder Überdeckungswahrsch.) $1-\alpha$, wenn $P_\vartheta(\omega, \vartheta \in B(\omega)) = 1-\alpha$

Beruht meist auf einem Schätzer für ϑ.

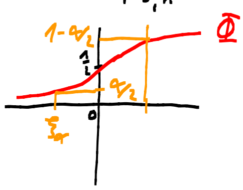
<u>Bsp.:</u> $X_1, \dots, X_n$ unabhängig P_λ. Dann $EX = \lambda$, $\mathrm{Var}\, X = \lambda$.

Schätzer für λ ist z.B. $\hat\lambda = \frac{1}{n} \sum X_i$

Nach zentralem Grenzwertsatz:

$$n^{-1/2} \sum (X_i - \lambda) \Rightarrow N_{0,\lambda} \quad , \text{ also } \quad \frac{n^{-1/2} \sum (X_i - \lambda)}{\lambda^{1/2}} \Rightarrow N_{0,1}$$

Es gilt mit $\xi_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$



$$P_\lambda^n \left(\xi_{\alpha/2} < \lambda^{-1/2} n^{-1/2} \sum (X_i - \lambda) < \xi_{1-\alpha/2} \right) \longrightarrow 1-\alpha$$

Mit $\hat\lambda = \frac{1}{n} \sum X_i$ (oder $\hat\lambda = \frac{1}{n} \sum (X_i - \bar X)^2$) gilt mit $\xi_{\alpha/2} = -\xi_{1-\alpha/2}$

$$P_\lambda^n \Big(\underbrace{\frac{1}{n} \sum X_i - n^{-1/2} \xi_{1-\alpha/2} \hat\lambda^{1/2} < \lambda < \frac{1}{n} \sum X_i + n^{-1/2} \xi_{1-\alpha/2} \hat\lambda^{1/2}}_{B} \Big) \longrightarrow 1-\alpha$$